内 容 提 要

本书是一本指导随机振动解题方法的书。针对随机振动理论的基本内容，编写了较多的例题和选编了大量的习题，包括系统动态特性的计算、随机振动统计量的计算和随机输出响应的计算等三方面的内容。在每一章中，首先扼要地介绍基本理论，然后推荐具体的解题方法和步骤，并提供几种典型的例题，最后给出较大分量的练习题。绝大部分习题都给出了答案，较难的习题还给出了必要的提示。

本书可供力学、机械、交通运输、建筑、地质等部门的工程技术人员和高等学校师生使用。

前　言

随着随机振动理论在交通运输、机械、建筑、地质等工程领域内得到广泛的应用，不少高等院校已单独开设了随机振动课程。但目前教材和资料中的例题和练习题较少，初学者感到解题困难较大，迫切希望有一本指导解题方法的书。本书正是为了加深初学者对随机振动理论的理解和巩固所学基本理论而编写的一本解题方法和习题集。

在本书中，每一章都编有系统的内容提要、各类问题的解题方法，典型例题的詳解、较多的练习题并附有答案。本书内容包括：系统动态特性的计算，描述随机振动的统计量的计算，随机输出响应计算等三部份。系统特性的计算是研究规则振动和随机振动的基础，故安排了较多的练习，这部分题目除可用与随机振动有关的系统分析方法求解外，也可采用解微分方程的经典方法求解，因此这部分也可当作规则振动的习题来用。本书后两部分是随机振动的一些基本统计量的计算和有关公式的应用，没有包括其他课程将要介绍的某些专门应用问题（如测量精度与数字谱分析问题）。

本书由重庆大学何渝生主编，张广凯参加了第十章的编写工作。湛正中作了全书的校对整理和描图工作。本书承上海交大严济宽老师、西安交大张景繪老师审阅，提出了许多宝贵意见，使本书的质量得以提高，謹在此表示感谢。

由于编者水平有限，书中难免有一些缺点和错误，恳请使用本书的读者批评指正。

编　者

1983.3.

目　　录

第　一　章

系统动态特性分析（一）

频率响应函数及频率响应法

内　容　提　要

§1.1　系统的动态特性

无论是规则振动或者是随机振动所涉及的主要内容都可以用图1的框图来加以说明。工程实际中的各种机械工程结



图　1

构，甚至机器零部件，都可理解为框图中的系统，它在力或运动激励的作用下，所产生的振动输出响应完全决定于系统本身的动态特性。无论是规则振动或随机振动，系统的动态特性都可用频率响应函数$H(\omega)$，脉冲响应函数$h(\tau)$和传递函数$G(s)$来表示。这些函数之间存在有如下的关系：

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau,$$

$$H(\omega)=G(j\omega),$$

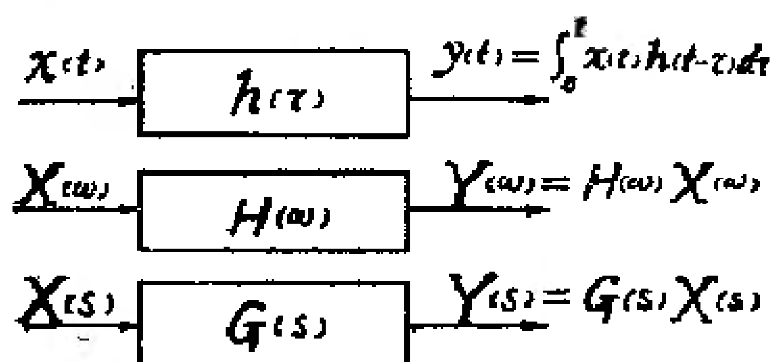
$$h(\tau)=L^{-1}\{G(s)\},\qquad(1.1)$$

$$h(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega,$$

$$G(s)=L[h(\tau)],$$

$$G(j\omega)=H(\omega).$$

根据这三个函数便可确定输入与输出的关系。在不同的情况下图 1 可分别表示成图 2 的三个框图：



$x(t),y(t)$ —— 输入，输出的时间历程

$X(\omega),Y(\omega)$ —— 输入，输出的富氏变换

$X(s),Y(s)$ —— 输入，输出的拉氏变换

图 2

由此可见，无论研究规则振动或随机振动问题，都必须首先确定系统的动态特性。

§1.2 频率响应函数

（一）频率响应函数的定义

在零初始条件下，系统在单位幅值正弦干扰输入作用下产生的输出幅值，称为对应于此输入 $x(t)$ 和输出 $y(t)$ 的频率响应函数 $H(\omega)$。在一般情况下它是一个复数，可记为：

$$H(\omega)=|H(\omega)|e^{-j\phi},\tag{1.2}$$

其中 $|H(\omega)|$ —— 频率响应函数的模，称为系统的增益因

子；

φ——频率响应函数的幅角，称为系统的相位因子，在单输入，输出情况，系统的频率响应函数等于输出，输入富氏变换的比值，即

$$H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}, \tag{1.3}$$

其中 $X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$ ——输入 $x(t)$ 的富氏变换；　(1.4)

$Y(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}y(t)e^{-j\omega t}dt$ ——输出 $y(t)$ 的富氏变换。　(1.5)

对于纯谐输入，若用复数形式表示系统的输出与输入时，则频率响应函数就等于输出，输入复数的比值，即

$$H(\omega)=\frac{Y_j(t)}{X_j(t)}, \tag{1.6}$$

其中 $X_j(t)=F_0\cos\omega t+jF_0\sin\omega t=F_0e^{j\omega t}$ 是输入 $x(t)$ 的复数表示，按本书规定它的虚部才表示真正的输入激励；

$Y_j(t)=A\cos(\omega t+\varphi)+jA\sin(\omega t+\varphi)=Ae^{j\varphi}\cdot e^{j\omega t}$ 是输出的复数表示，按本书规定它的虚部才表示真正的输出响应。

（二）单自由度系统频率响应函数的计算方法

单自由度系统的频率响应函数可根据定义用公式（1.3）或（1.6）来计算，但较为方便的计算方法是设系统的输入 $x(t)=e^{j\omega t}$ 为单位幅值的正弦波，通过求解运动微分方程的方法求出复数形式的输出 $y(t)=H(\omega)e^{j\omega t}$ 其中的复数振幅 $H(\omega)$ 就是所求的频率响应函数。其具体步骤如下：

（1）分析系统的运动和受力情况，选择坐标，建立系统的运动微分方程式。

（2）用单位幅值的正弦信号 $x(t)=e^{j\omega t}$ 代替真正的输入作用在系统上，并设系统的输出为$y(t)=H(\omega)e^{j\omega t}$。

（3）将输出，输入及其导数代入系统的运动微分方程式，消去公因子$e^{j\omega t}$后，便可解出系统的频率响应函数$H(\omega)$。

例1.1 设图3所示系统在地面不平度输入 $x(t)$ 作用下产生振动，试求对应于质量m的位移输出$y(t)$的频率响应函数。

已知：m，k，c。

求：$H(\omega)$。

解：根据图3(*a*)所示的受力图可列出系统的运动微分方程：

$$m\ddot{y}=k(x-y)-c\dot{y},$$

即 $$m\ddot{y}+c\dot{y}+ky=kx \quad (a)$$

令 $$x(t)=e^{j\omega t},$$
$$y(t)=H(\omega)e^{j\omega t}, \quad (b)$$

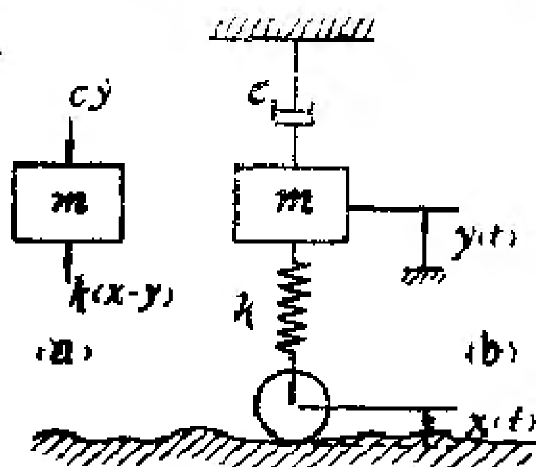


图 3

则 $$\dot{y}(t)=j\omega H(\omega)e^{j\omega t},$$
$$\ddot{y}(t)=-\omega^2 H(\omega)e^{j\omega t}. \quad (c)$$

代入(*a*)式得

$$(-m\omega^2+jc\omega+k)H(\omega)e^{j\omega t}=ke^{j\omega t}.$$

由此可解得

$$H(\omega)=\frac{k}{k-m\omega^2+jc\omega}.$$

§1.3 频率响应法

利用频率响应函数$H(\omega)$求解振动响应的方法称为频率响应法。对于不同的输入，可按以下三种方法分别求解。

（一）求简谐输入的响应

根据公式（1.6）用频率响应法求简谐输入响应的步骤如下：

（1）分析力和运动，建立系统的运动微分方程式。

（2）确定系统的频率响应函数$H(\omega)$。

（3）将简谐输入$F(t)=F_0\sin\omega t$表示成复数形式。

（4）用公式（1.6）计算输出的复数表达式。

$$Y_I(t)=H(\omega)X_I(t)。\tag{1.7}$$

（5）取输出复数表达式的虚部即得所求的输出响应。

在一般情况下都把系统的复数输入$X_I(t)$表示成指数形式，因此，当频率响应函数$H(\omega)$也是复数时，为了便于运算也应把频率响应函数表示成指数。此时可用如下的公式计算频率响应函的模与幅角：

$$H(\omega)=|H(\omega)|e^{j\varphi}=\frac{G+jH}{E+jF}$$

$$=\frac{(G+jH)(E-jF)}{(E+jF)(E-jF)}$$

$$=\frac{GE+HF}{E^2+F^2}-j\frac{GF-HE}{E^2+F^2},$$

$$|H(\omega)|^2=\frac{(GE+HF)^2+(GF-HE)^2}{(E^2+F^2)^2}$$

$$=\frac{(E^2+F^2)(G^2+H^2)}{(E^2+F^2)^2},$$

则
$$|H(\omega)| = \sqrt{\frac{G^2+H^2}{E^2+F^2}}, \tag{1.8}$$

$$\phi = tg^{-1}\frac{GF-HE}{GE+HF}. \tag{1.9}$$

因为无阻尼振动系统的频率响应函数是频率的实函数，当输入是简谐函数时，可把公式(1.6)直接写成实数的形式，即

$$x(t)=H(\omega)y(t). \tag{1.10}$$

例1.2 在图4所示的振动系统中，AB杆可绕光滑铰链A转动。已知重物的质量m，弹簧的刚度k，阻尼器的线性阻尼系数c以及各元件间的距离a。试求质量m在正弦激振力$F=F_0\sin\omega t$作用下的微小振动规律。

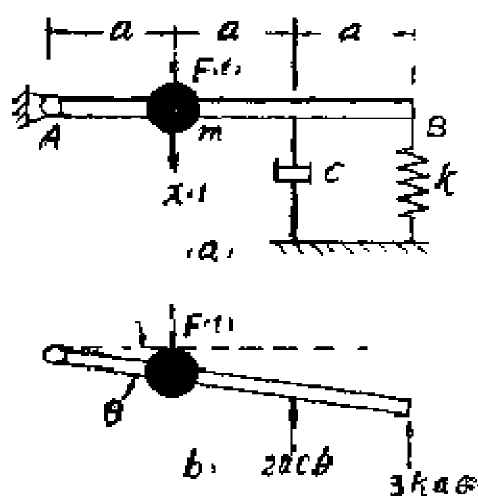


图 4

已知：m，k，c，a，

$F(t)=F_0\sin\omega t$。

求：$x(t)$。

解：设AB杆绕A点的转角为θ，则质量m的位移为$x=a\theta$，由受力图4(b)可列出AB杆绕O点转动的运动微分方程。

$$ma^2\ddot{\theta}=F(t)a-2ca\dot{\theta}\times 2a-3ka\theta\times 3a.$$

代入$x=a\theta$后，可简化为：

$$m\ddot{x}+4c\dot{x}+9kx=F(t). \tag{1}$$

为了求频率响应函数，令

$$F(t)=e^{j\omega t},\quad x(t)=H(\omega)e^{j\omega t};$$

则
$$\dot{x}(t)=j\omega H(\omega)e^{j\omega t},\qquad \ddot{x}(t)=-\omega^2H(\omega)e^{j\omega t}.$$

将它们代入(1)式得：

$$(-m\omega^2 + j4c\omega + 9k)H(\omega)e^{j\omega t} = e^{j\omega t}.$$

由此可以解出系统的频率响应函数

$$H(\omega) = \frac{1}{(9k - m\omega^2) + j4c\omega} \tag{2}$$

将简谐干扰力$F(t) = F_0\sin\omega t$表成复数形式，

$$F_j(t) = F_0(\cos\omega t + j\sin\omega t) = F_0 e^{j\omega t}, \tag{3}$$

再将(2)、(3)两式代入公(1.7)式，计算质量m的位移输出响应

$$x_r(t) = H(\omega)F_j(t)$$

$$= \frac{1}{9k - m\omega^2 + j4c\omega} F_0 e^{j\omega t}$$

$$= \frac{F_0}{\sqrt{(9k - m\omega^2)^2 + 16c^2\omega^2}} e^{j(\omega t - \phi)}$$

$$= \frac{F_0}{\sqrt{(9k - m\omega^2)^2 + 16c^2\omega^2}} [\cos(\omega t - \phi) +$$

$$+ j\sin(\omega t - \phi)].$$

按规定，此式的虚部就是所求质量m的运动规律

$$x(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(9k - m\omega^2)^2 + 16c^2\omega^2}} \sin(\omega t - \phi),$$

其中， $\phi = \mathrm{tg}^{-1}\dfrac{4c\omega}{9k - m\omega^2}$.

例1.3 质量$m = 1000$kg的车箱用弹簧和阻尼器支承在轮子上，如图5所示。弹簧的刚性系数$k = 350KN/m$，阻尼因素$\xi = 0.5$，在不计轮子的重量和变形时，试求小车沿正弦路面$\left(y = 0.04\sin\dfrac{2\pi}{5}vt\right)$以速度$v = 100km/h$行驶时车箱的振动规律。

已知： $m=1000kg$， $k=350KN/m$，

$\xi=0.5$， $y=0.04\sin\dfrac{2\pi}{5}vt$。

$v=100km/h$

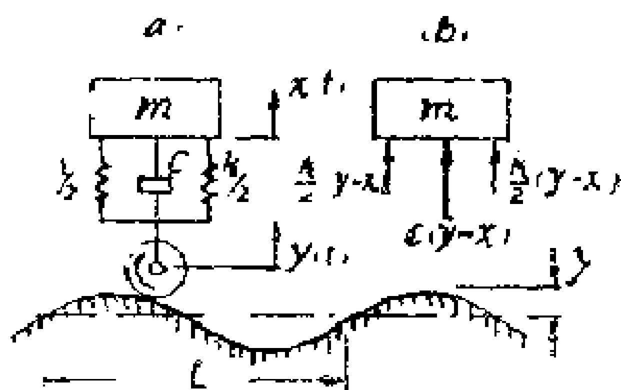


图 5

求： $x(t)$。

解： 由图 5(b) 所示的受力图可列出车箱的运动微分方程：

$$m\ddot{x}=c(\dot{y}-\dot{x})+k(y-x),$$

或 $$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=c\dot{y}+ky。\qquad (1)$$

为了求对应于位移输入 y 的频率响应函数

令： $y=e^{j\omega t}$， $x=H(\omega)e^{j\omega t}$，

则 $\dot{y}=j\omega e^{j\omega t}$， $\dot{x}=j\omega H(\omega)e^{j\omega t}$，

$\ddot{x}=-\omega^2H(\omega)$。

将它们代入(1)式，得

$$(-m\omega^2+jc\omega+k)H(\omega)e^{j\omega t}=(jc\omega+k)e^{j\omega t}。$$

由此可解出车箱位移对应于路面输入的频率响应函数

$$H(\omega)=\frac{k+jc\omega}{k-m\omega^2+jc\omega}。\qquad (2)$$

将已知的输入表示成复数形式

$$y_j(t) = 0.04\left(\cos\frac{2\pi}{5}vt + j\sin\frac{2\pi}{5}vt\right)$$

$$= 0.04e^{j\frac{2\pi}{5}vt}. \qquad (3)$$

将(2)、(3)式代入式(1·7)中计算输出的复数表达式，

$$X_j = H(\omega)y_j(t)$$

$$= \frac{k + jc\omega}{k - m\omega^2 + jc\omega} \times 0.04e^{j\frac{2\pi}{5}vt}$$

$$= 0.04\sqrt{\frac{k^2 + c^2\omega^2}{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}}\, e^{j\left(\frac{2\pi}{5}vt - \phi\right)},$$

此式中虚部就是车箱的位移输出。

$$x(t) = 0.04\sqrt{\frac{k^2 + c^2\omega^2}{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}}$$

$$\cdot \sin\left(\frac{2\pi}{5}vt - \phi\right).$$

代入已知数据后，可得

$$x(t) = 0.027\sin(35t - \phi),$$

其中 $\tan\phi = \dfrac{mc\omega^3}{k(k - m\omega^2) + (c\omega)^2}$.

(二)用富氏级数求解法

输入的周期函数$x(t) = x(t + T)$可展开成如下的富氏级数：

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t + b_n\sin n\omega t)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \delta_n). \qquad (1.11)$$

当略去影响静平衡位置的常数后，可写成如下复数形式：

$$x_f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\omega t + \delta_n) + jA_n \sin(n\omega t + \delta_n)]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{j\delta_n}) e^{jn\omega t} = \sum_{n=1}^{\infty} x_{nf} \qquad (1.12)$$

其中
$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)dt;$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos n\omega t dt;$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin n\omega t dt;$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \qquad (1.13)$$

$$\delta_n = \mathrm{tg}^{-1}\frac{a_n}{b_n}.$$

利用公式(1.6)，由频率响应函数可求出对应于输入的每一简谐分量的复数响应

$$x_{nf} = A_n e^{j\delta_n} e^{jn\omega t} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad (1.14)$$

$$y_{nf} = H(\omega_n) x_{nf}$$

$$= H(\omega_n) A_n e^{j\delta_n} e^{jn\omega t}. \qquad (1.15)$$

再利用线性系统的迭加原理，将各次谐波输入的解(1.15)相加，便可求得系统总输出的复数解

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} H(\omega_n) x_n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} H(\omega_n) A_n e^{j\delta_n} e^{\ldots} \quad (1.16)$$

此解[illegible]虚部就是所要求的在周期扰输入下系统的实际输出。

从以上分析可得出如下的解[illegible]步骤：

（1）确[illegible]系统的频率响应函数$H(\omega)$。

（2）用式(1.12)将周期输入分解成富氏级数，用式(1.13)计算出各次富氏系数。

（3）应用公式(1.16)求输[illegible]复数表达式。

（4）取复数解的虚部，确定系统输出的真实响应。

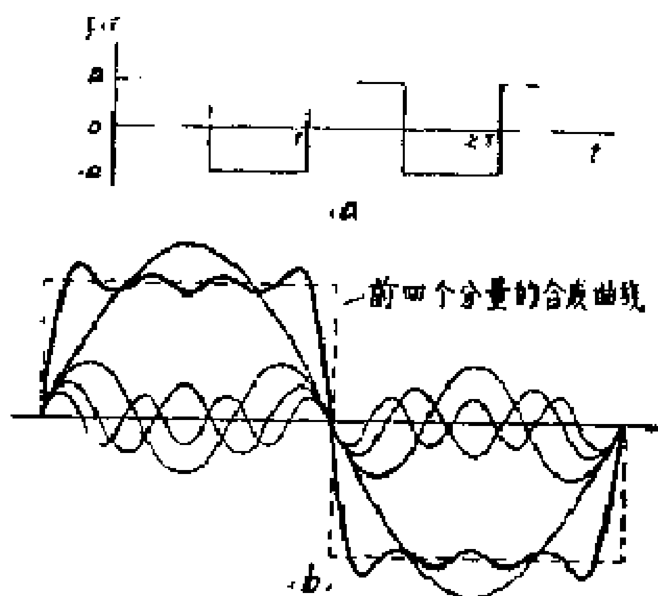


图 6

例1.4 试求图示矩形波的[illegible]氏级数。

已知：T，a，$F(t)=F(t+T)$，

$$F(t) = \begin{cases} a, & 0 \le t < \frac{T}{2}, \\ a, & \frac{T}{2} \le t < T. \end{cases}$$

求：$F(t)$的[illegible]氏级数。

解： 用公式(1.13)计算各次富氏系数

$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^T F(t)dt$$

$$=\frac{2}{T}\left\{\int_0^{T/2} a\cdot dt+\int_{T/2}^{T}(-a)dt\right\}=0.$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos n\omega t dt$$

$$=\frac{2a}{T}\left[\int_0^{T/2}\cos n\omega t dt-\int_{T/2}^{T}\cos n\omega t\cdot dt\right]$$

$$=0.$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T F(t)\sin n\omega t dt$$

$$=\frac{2a}{T}\left[\int_0^{T/2}\sin n\omega t dt-\int_{T/2}^{T}\sin n\omega t dt\right]$$

$$=-\frac{2a}{T}\cdot\frac{1}{n\omega}\left(\cos n\omega t\Big|_0^{T/2}-\right.$$

$$\left.-\cos n\omega t\Big|_{T/2}^{T}\right)$$

$$=-\frac{2}{T}a\frac{T}{2n\pi}\cdot\left(\cos\frac{2n\pi}{T}t\Big|_0^{T/2}-\right.$$

$$\left.-\cos\frac{2n\pi}{T}t\Big|_{T/2}^{T}\right)$$

$$=-\frac{1}{n\pi}a(\cos n\pi-1-\cos 2n\pi+\cos n\pi)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{4}{n\pi}a, & (n=1,3,5,\cdots);\\[2ex] 0. & (n=2,4,6,\cdots).\end{cases}$$

由此便可写出矩形波的富氏级数展开式

$$F(t)=\frac{4a}{\pi}\left(\sin\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t+\frac{1}{5}\sin 5\omega t+\cdots\right)$$

$$=\frac{4a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\omega t\quad(n=1,3,5,\cdots).\tag{1.17}$$

前四次谐波分量及它们叠加合成曲线如图6(b)所示，它比较接近于矩形波。

例1.5 图7所示振动系统的上部支座按矩形波规律运动，试用频率响应法确定质量m的位移输出。

已知：T，k，m，c，$x(t)=x(t+T)$，

$$x(t)=\begin{cases}+1, & 0<t<\dfrac{T}{2};\\ -1, & \dfrac{T}{2}<t<T.\end{cases}$$

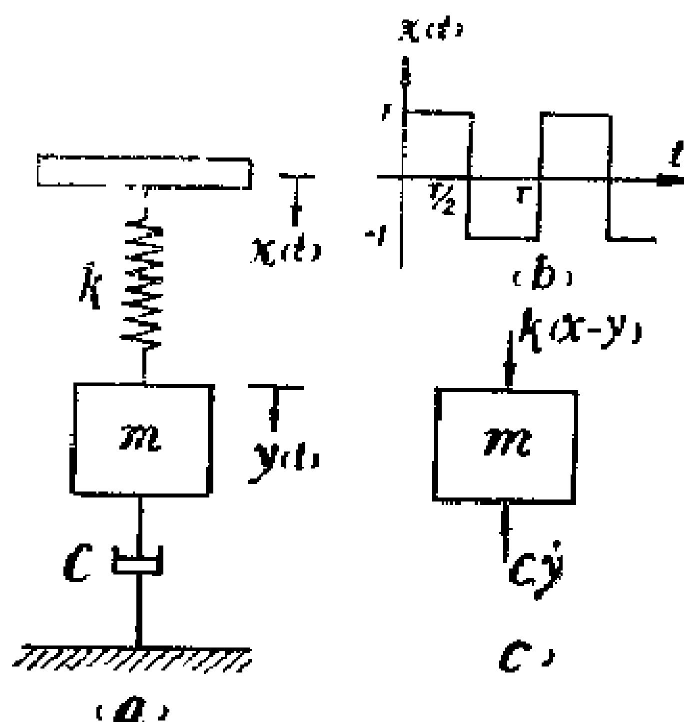


图 7

求：$y(t)$。

解：根据图5(c)的受力情况可列出质量m的运动微分方程，

$$m\ddot{y} = -c\dot{y} + k(x - y),$$

或 $$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = kx。$$

令 $$x = e^{j\omega t},$$

$$y = H(\omega)e^{j\omega t};$$

则 $$\dot{y} = j\omega H(\omega)e^{j\omega t},$$

$$\ddot{y} = -\omega^2 H(\omega)e^{j\omega t}。\qquad (b)$$

代入(a)式得

$$(-m\omega^2 + jc\omega + k)H(\omega)e^{j\omega t} = ke^{j\omega t}。$$

由此可解出频率响应函数

$$H(\omega) = \frac{k}{(k - m\omega^2) + jc\omega}$$

$$= \frac{k[(k - m\omega^2) - jc\omega]}{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}$$

$$= |H(\omega)|e^{-j\varphi},$$

其中 $$|H(\omega)| = \frac{k}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}},$$

$$\varphi = \mathrm{tg}^{-1}\frac{c\omega}{k - m\omega^2}。$$

由例1.4的公式(1.17)可直接写出矩形波位移输入的富氏级数展开式

$$x(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\omega t。\ (n = 1, 3, 5, \cdots)$$

由此可把输入写成复数形式

$$x(t)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\cos n\omega t+j\sin n\omega t)$$

$$=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{jn\omega t}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}x_{nj}\qquad(n=1,3,5,\cdots),\qquad(d)$$

其中 $\omega=\frac{2\pi}{T}$。

将(d)式代入(1.16)求位移输出的复数形式

$$y_j(t)=\sum_{n=1}^{\infty}H(\omega_n)x_{nj}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}|H(\omega_n)|e^{-j\varphi}\cdot\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{n}e^{jn\omega t}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}|H(\omega_n)|\frac{4}{n\pi}e^{j(n\omega t-\varphi)}\qquad(e)$$

$$(n=1,3,5,\cdots).$$

它的虚部就是所求的位移输出响应

$$y(t)=\sum_{n=1}^{\infty}|H(\omega_n)|\frac{4}{n\pi}\sin(n\omega t-\varphi)$$

$$=\frac{4}{\pi}\sum\frac{k}{n\sqrt{(k-mn^2\omega^2)^2+c^2n^2\omega^2}}\sin(n\omega t-\varphi)$$

$$(n=1,3,5,\cdots).$$

例1.6 一个由凸轮激励的有阻尼的质量——弹簧系统，如图8所示。凸轮使顶杆AB在铅垂方向按锯齿波规律作周期性的运动，而顶杆又通过弹性系数为k_1的弹簧迫使

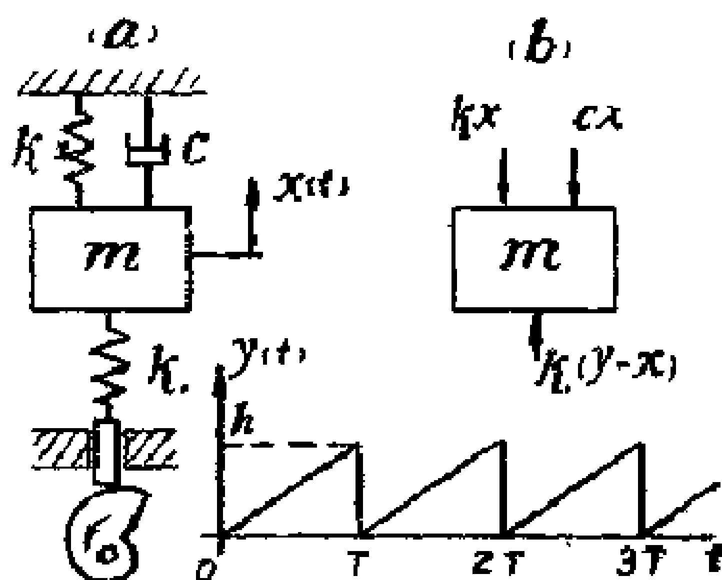


图 8

质量m振动。若已知凸轮的升程为h，转速为60转/分和系统的m，k，c，试求系统的强迫振动。

已知：m，k，k_1，c，h，$y(t)=y(t+T)$

$T=1$秒。 $y(t)=\frac{h}{T}t \quad 0<t<T$

求：$x(t)$。

解：（1）确定系统的频率响应函数，由图8(*b*)所示的受力图，根据牛顿定律，列出质量m的运动微分方程

$$m\ddot{x}=-c\dot{x}-kx+k_1(y-x),$$

或 $$m\ddot{x}+c\dot{x}+(k+k_1)x=k_1y. \tag{1}$$

采用与例1.3相似的方法可求得对应于输入$y(t)$的频率响应函数。

$$H(\omega)=\frac{k_1}{k+k_1-m\omega^2+jc\omega}. \tag{2}$$

（2）将周期输入展成富氏级数

$$y(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\omega t+b_n\sin\omega t) \qquad (3)$$

用公式(1.13)计算各次富氏系数

$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^T y(t)dt$$

$$=\frac{2}{T}\int_0^T \frac{h}{T}tdt$$

$$=\frac{2h}{T^2}\cdot\frac{1}{2}T^2$$

$$=h$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T y(t)\cos n\omega t dt$$

$$=\frac{2h}{T^2}\int_0^T t\cos n\omega t dt$$

$$=\frac{2h}{T^2}\cdot\frac{1}{(n\omega)^2}(\cos n\omega t+n\omega t\sin n\omega t)\Big|_{t=0}^{t=T}$$

$$=\frac{h}{2n^2\pi^2}(\cos 2\pi n-2\pi n\sin 2\pi n-1)$$

$$=0.$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T y(t)\sin\omega t dt$$

$$=\frac{2h}{T^2}\int_0^T t\sin n\omega t dt$$

$$=\frac{2h}{T^2}\cdot\frac{1}{(n\omega)^2}(\sin n\omega t-n\omega t\cos n\omega t)\Big|_{t=0}^{t=T}$$

$$=\frac{h}{2n^2\pi^2}(\sin 2\pi n-2\pi n\cos 2\pi n)$$

$$= \frac{h}{n\pi}.$$

将它们代入（3）式得

$$y(t) = \frac{h}{2} - \frac{h}{\pi}\left(\sin\omega t + \frac{1}{2}\sin 2\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \cdots\right)$$

$$= \frac{h}{2} - \frac{h}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\omega t. \qquad (4)$$

（3）用公式(1.12)计算输入的复数表达式

将输入$y(t)$表示为复数

$$y_1(t) = \frac{h}{2}e^{j\cdot\frac{\pi}{2}\cdot t} - \frac{h}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{jn\omega t}, \qquad (5)$$

把（2）、（5）两式代入公式(1.16)求位移输出的复数形式

$$x_f(t) = H(o)\frac{h}{2}e^{j\cdot\frac{\pi}{2}\cdot t} - \frac{h}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}H(n\omega)\frac{1}{n}e^{jn\omega t}$$

$$= \frac{hk_1}{2(k+k_1)}e^{j\cdot\frac{\pi}{2}\cdot t} - \frac{h}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{k_1}{(k+k_1) - m(n\omega)^2 + j(n\omega)c}e^{jn\omega t}.$$

此式中的虚部就是所求的振动规律，即

$$x(t) = \frac{hk_1}{2(k+k_1)} - \frac{k_1 h}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{(k+k_1-mn^2\omega^2)^2 + c^2n^2\omega^2}}\sin(n\omega t - \phi_n),$$

式中

$$\phi_n = tg^{-1}\frac{cn\omega}{k_1+k-mn^2\omega^2}; \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi.$$

（三）富氏积分求解法

当输入是非周期的任意激励时，则应先用公式（1.1）求出输入$x(t)$的富氏变换

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}dt, \qquad (1.1)$$

再用公式(1.3)通过频率响应函数$H(\omega)$求出输出$y(t)$的富氏变换

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega), \qquad (1.3)$$

对它作富氏逆变换即得系统的输出响应

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega)e^{i\omega t}d\omega, \qquad (1.1)$$

在计算富氏变换时，常用到以下几个性质：

（1）实函数的富氏变换一般是复数，其实部是偶函数，虚部是奇函数。实偶函数的富氏变换仍为实函数，而实奇函数的富氏变换是纯虚函数。

（2）线性性质　如$f_1(t)$和$f_2(t)$的富氏变换为$F_1(\omega)$和$F_2(\omega)$，α_1，α_2是任意常线，则有

$$F[\alpha_1 f_1(t)+\alpha_2 f_2(t)] = \alpha_1 F_1(\omega)+\alpha_2 F_2(\omega).$$

（3）对称性　在$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$中，如把$F(\omega)$的变量换成$t$，则有$F[F(t)]=2\pi f(-\omega)$。

（2）时移定理　函数$f(t)$的富氏变换为$F(\omega)$，设$f(t)$沿时间t轴移动一个常数t_0，则其富氏谱不变，但相角增加了线性项$-\omega t_0$，即$F[f(t-t_0)] = F(\omega)e^{-i\omega t_0}$。

（5）频移定理　若函数$f(t)$的富氏变换为$F(\omega)$，则$f(t)e^{i\omega_0 t}$的富氏变换为$F(\omega-\omega_0)$，即$F[f(t)e^{i\omega_0 t}]$

$F(\omega-\omega_0)$。

（6）时标定理　函数 $f(t)$ 的富氏变换为$F(\omega)$，设 a 是除零以外的任意实常数，则

$$F[f(at)]=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

（7）时域微分定理

$$F\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right]=(j\omega)^n F[f(t)].$$

（8）时域积分定理

$$F\left[\int_{-\infty}^{t} f(t)dt\right]=\frac{1}{j\omega}F[f(t)].$$

（9）乘积定理　　若 $F_1(\omega)=F[f_1(t)]$，

$$F_2(\omega)=F[f_2(t)],$$

则
$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1^*(\omega)F_2(\omega)d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)F_2^*(\omega)d\omega,$$

其中　$F_1^*(\omega)$，$F_2^*(\omega)$ 分别是 $F_1(\omega)$，$F_2(\omega)$ 的共轭函数。

（10）时间函数的乘积　设 $f_1(t)$，$f_2(t)$ 两函数的富氏变换为$F_1(\omega)$，$F_2(\omega)$，则$f_1(t)\times f_2(t)$的富氏变换为

$$F[f_1(t)\cdot f_2(t)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(v)\cdot F_2(\omega-v)dv.$$

用富氏积分法求解输出响应的步骤如下：

（1）确定系统的频率响应函数$H(\omega)$。

（2）按公式(1.4)计算输入的富氏变换。

（3）按公式(1.3)计算输出的富氏变换。

（4）按公式(1.18)计算输出的富氏变换的逆变换，便可求得实际的输出响应函数。

解题时，需要作的富氏变换和富氏逆变换除按定义公式(1.4)，(1.5)和(1.18)计算以外，还可用专门的富氏变换表和富氏变换的性质来简化计算。

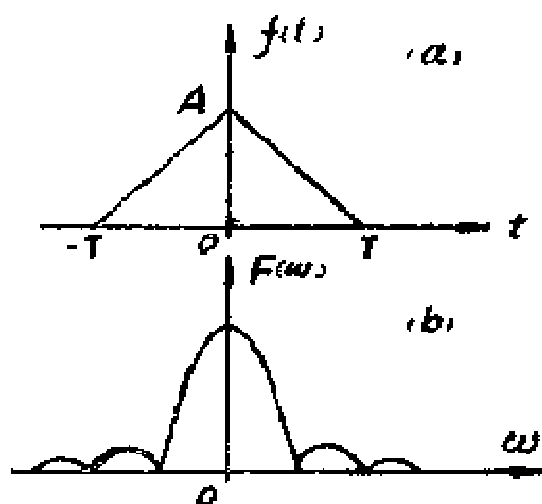


图 9

例1.7 试求图9所示三角脉冲函数的富氏变换。

已知：A，T，

$$f(t)=\begin{cases} A\left(1-\dfrac{|t|}{T}\right), & |t|<T, \\ 0, & |t|>T. \end{cases}$$

求：$F(\omega)$。

解：直接用公式(1.4)积分得

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{-T}^{T} A\left(1-\frac{|t|}{T}\right)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{-T}^{T} Ae^{-j\omega t}dt+A\int_{-T}^{0}\frac{t}{T}e^{-j\omega t}dt$$

$$-A\int_{0}^{T}\frac{t}{T}e^{-j\omega t}dt$$

$$=-\frac{A}{j\omega}\left[e^{-j\omega T}-e^{j\omega T}\right]+A\left[\frac{-1}{j\omega}e^{j\omega T}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\omega^2 T}\left(1-e^{j\omega T}\right)\right]$$

$$+A\left[\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega T}-\frac{1}{\omega^2 T}(e^{-j\omega T}-1)\right]$$

$$=\frac{2A}{\omega^2 T}(1-\cos\omega T)=\frac{4A\sin^2(\omega T/2)}{T\omega^2}.$$

例1.8 图10(*a*)所示振动系统的上部支座，突然受到一个持续时间为 $2T$ 的阶跃位移输入 $x(t)=a$，如图 10(*b*) 所示，试用频率响应法求质量 m 的位移输出响应（设系统开始处于静止）。

已知：m，k_1，k_2，a，T，

$$x(t)=\begin{cases}a, & -T<t\leqslant T,\\ 0, & t<-T,\ t>T.\end{cases}$$

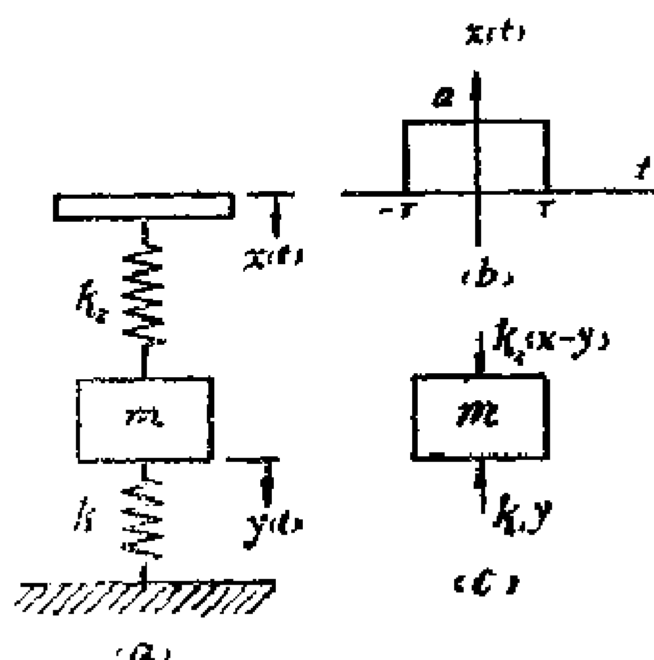


图 10

求：$y(t)$。

解：(1) 求频率响应函数 由图 10(*c*) 所示的受力情况列出质量 m 的运动微分方程式

$$m\ddot{y}=-k_1y+k_2(x-y),$$

或 $$m\ddot{y}+(k_1+k_2)y=k_2x. \qquad (a)$$

令 $$x=e^{j\omega t},\quad y=H(\omega)e^{j\omega t}, \qquad (b)$$

$$\dot{y}=j\omega H(\omega)e^{j\omega t},\quad \ddot{y}=-\omega^2H(\omega)e^{j\omega t},$$

代入(a)式得

$$(-m\omega^2+k_1+k_2)H(\omega)e^{j\omega t}=k_2e^{j\omega t}.$$

由此可解出频率响应函数

$$H(\omega)=\frac{k_2}{k_1+k_2-m\omega^2}$$

$$=\frac{k_2}{k_1+k_2}\cdot\frac{1}{1-\omega^2/\omega_0^2} \qquad (c)$$

其中 $\omega_0=\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$ ——系统的固有频率。

(2) 计算输入的富氏变换

由公式(1.4)求得

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{-T}^{T}ae^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{a}{-j\omega}\int_{-T}^{T}e^{-j\omega t}d(-j\omega t)$$

$$=\frac{a}{-j\omega}[e^{-j\omega T}-e^{j\omega T}]. \qquad (d)$$

(3) 计算响应的富氏变换

$$Y(\omega)=H(\omega)X(\omega)$$

$$=\frac{k_2}{k_1+k_2-m\omega^2}\cdot\frac{a}{j\omega}[e^{j\omega T}-e^{-j\omega T}]$$

$$=\frac{ak_2}{k_1+k_2}\cdot\frac{1}{(1-\omega^2/\omega_0^2)j\omega}\cdot[e^{j\omega T}-e^{-j\omega T}].$$

$$(e)$$

（4）计算富氏逆变换求响应

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}Y(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k_2 a}{(k_1+k_2-m\omega^2)j\omega}\left[e^{j\omega T}-e^{-j\omega T}\right]e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{k_2 a}{2\pi j(k_1+k_2)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\omega T}-e^{-j\omega T}}{\omega[1-(\omega/\omega_0)^2]}e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{k_2 a}{2\pi(k_1+k_2)j}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\omega}-\frac{1}{2(\omega-\omega_0)}-\frac{1}{2(\omega+\omega_0)}\right]\left[e^{j\omega(t+T)}-e^{j\omega(t-T)}\right]d\omega. \tag{f}$$

注意在此式中当 $t<-T$ 时，$t+T<0$，$t-T<0$；

$-T<t<T$ 时，$t+T>0$，$t-T<0$；

$t>T$ 时，$t+T>0$，$t-T>0$。

应用如下的积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\omega\lambda}}{\omega}d\omega=\begin{cases}0, & \lambda<0;\\ 2\pi j, & \lambda>0.\end{cases} \tag{1.19}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\omega\lambda}}{\omega-\omega_0}d\omega=\begin{cases}0, & \lambda<0;\\ 2\pi j e^{j\omega_0\lambda}, & \lambda>0.\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\omega\lambda}}{\omega+\omega_0}d\omega=\begin{cases}0, & \lambda<0;\\ 2\pi j e^{-j\omega_0\lambda}, & \lambda>0.\end{cases}$$

可求出(f)式中的各项积分，于是便可求出质量的位移输出响应如下：

$$y(t)=0, \qquad t<-T;$$

$$y(t)=\frac{ak_2}{2\pi(k_1+k_2)j}\left[2\pi j-\frac{2\pi}{2}je^{j\omega_0(t+T)}-\frac{2\pi}{2}je^{-j\omega_0(t+T)}\right]$$

$$=\frac{ak_2}{k_1+k_2}\left[1-\frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0(t+T)}+e^{-j\omega_0(t+T)}\right)\right]$$

$$=\frac{ak_2}{k_1+k_2}\left[1-\cos\omega_0(t+T)\right],$$

$$-T<t<T; \qquad (g)$$

$$y(t)=\frac{ak_2}{2\pi(k_1+k_2)j}\left[\left(2\pi j-\frac{1}{2}2\pi je^{j\omega_0(t+T)}-\frac{1}{2}2\pi je^{-j\omega_0(t+T)}\right)-\left(2\pi j-\frac{1}{2}2\pi je^{j\omega_0(t-T)}-\frac{1}{2}2\pi je^{-j\omega_0(t-T)}\right)\right]$$

$$=\frac{ak_2}{k_1+k_2}\left[\cos\omega_0(t-T)-\cos\omega_0(t+T)\right], \quad t>T.$$

由(g)式可画出质量m的位移随时间变化曲线，如图11(b)所示。

应用关系$\sin\omega T=(e^{j\omega T}-e^{-j\omega T})/2j$由(d)，(e)两式便可将输入和输出富氏变换分别表示为

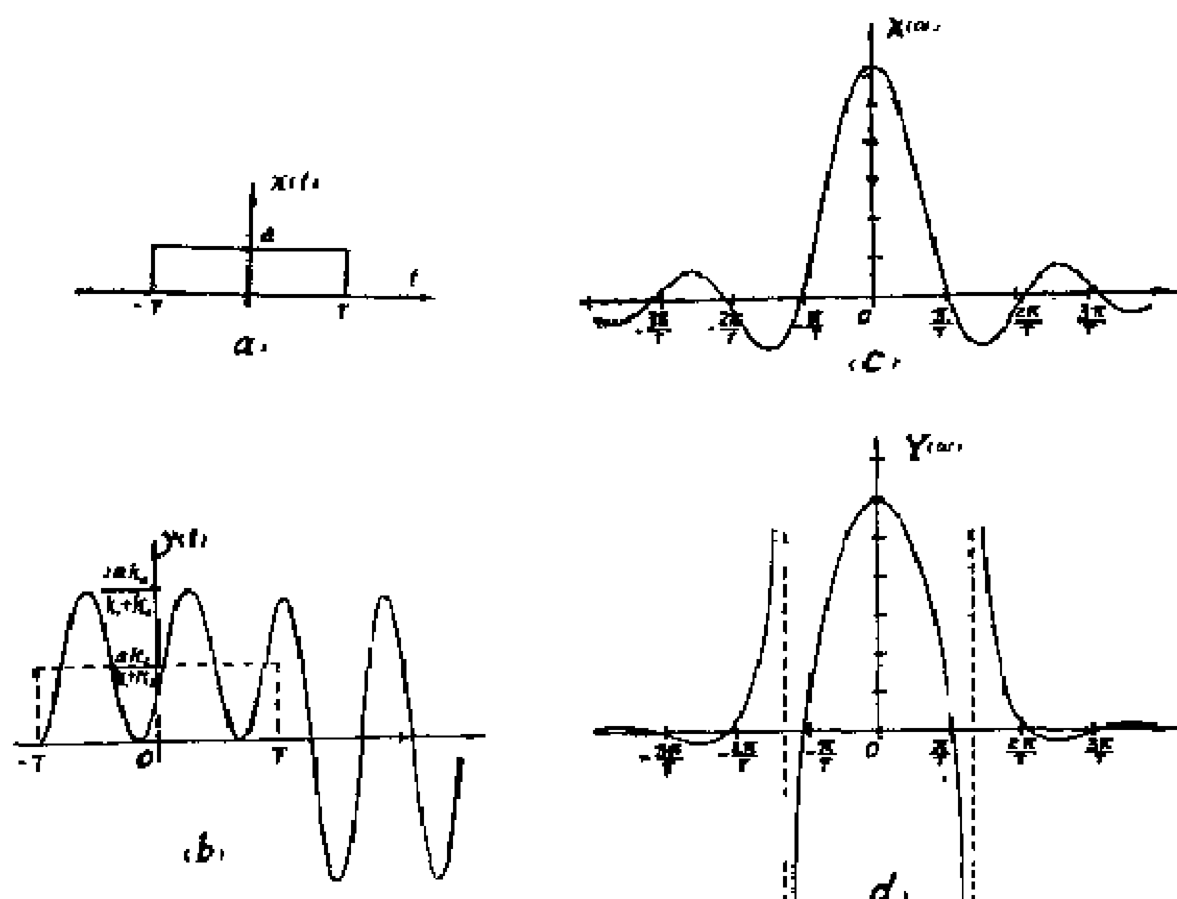


图 11

$$X(\omega)=2a\frac{\sin\omega T}{\omega},\qquad (h)$$

$$Y(\omega)=\frac{2ak_2}{k_1+k_2}\cdot\frac{\sin\omega T}{\omega[1-(\omega/\omega_0)^2]}.\qquad (i)$$

由此两式可作出输入,输出的频谱图,如图11(c),(d)所示。

习 题 一

1—1 无质量的小车用刚度为k的弹簧和阻尼系数为c的阻尼器与固定支座相联，如图1.1所示。试求在干扰力$F(t)$作用下，对应于小车位移输出的频率响应函数。

1—2 已知图1.2所示液压阻尼器中的弹簧刚度k和阻

尼系数c，设缸体的位移$x(t)$是输入，活塞位移$y(t)$是输出，在不计活塞质量的条件下试求系统的频率响应函数。

1－3　设图1.3所示机械系统顶端的位移$y(t)$是系统的

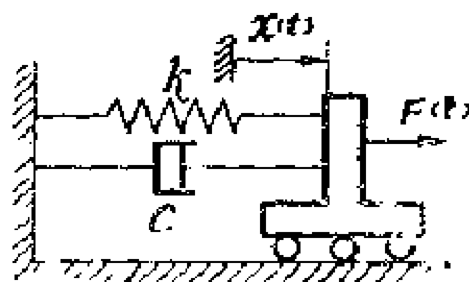


图 1.1

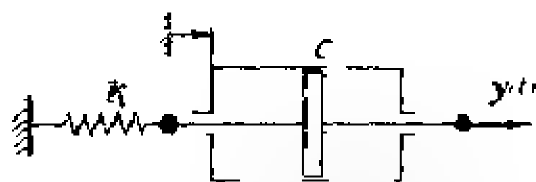


图 1.2

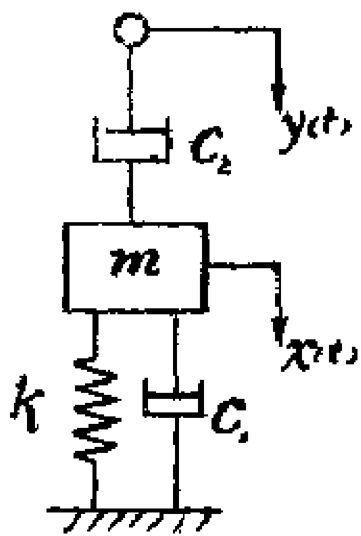


图 1.3

输入，质量m的铅垂位移是系统的输出，c_1和c_2是两个阻尼器的阻尼系数，k是弹簧刚度试求此系统的频率响应函数。

1－4　设图1.4中$y(t)$是系统的输入，$x(t)$是输出，已知K_1，K_2，C，求系统的频率响应函数。

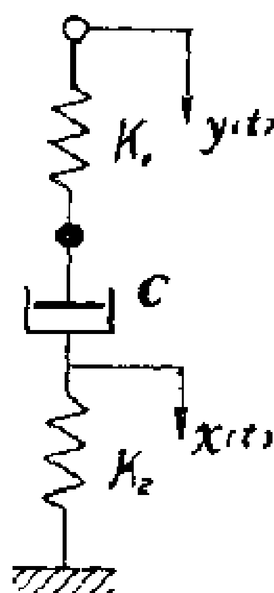


图 1.4

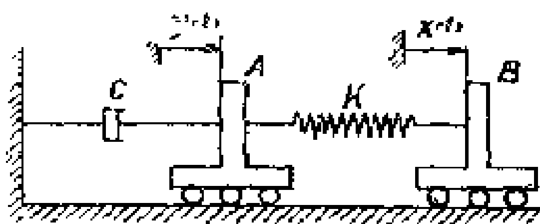


图 1.5

1—5　若将无质量小车A的位移$y(t)$作为图1.5所示系统的输出，而将无质量小车B的位移$x(t)$视为系统的输入，并已知弹簧刚度K和阻尼系数C，试求系统的频率响应函数。

1—6　图1.6所示悬臂梁，已知其抗弯刚度EJ和长度l_1，l_2，又知阻尼器的阻尼系数为c。当自由端有一横向输入$F(t)$时，若将B点的位移视为系统的输出，不计梁本身质量的影响，试求系统的频率响应函数。

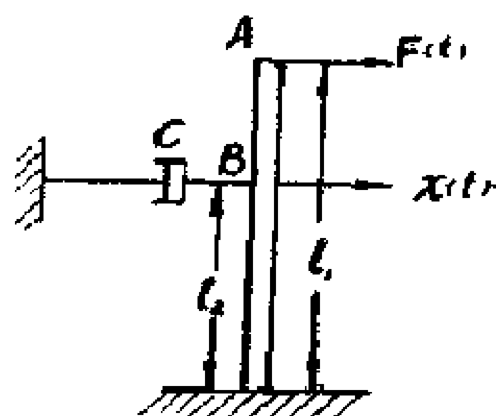


图　1-6

提示：长为l_1的悬臂梁自由端在横向力P作用下距固定端为l_2处的挠度为

$$\frac{P}{6EJ}\left(3l_2^2 l_1 - l_2^3\right).$$

1—7　图1.7中的轮子可绕水平轴转动它对转轴的转动惯量为J_0，轮缘绕有软绳，下端挂有质量为m的重物，另一端与刚度为k的弹簧相连。设作用在重物上的干扰力$F(t)$是系统的输入，重物的位移是输出，绳与轮之间无滑动，试求系统的频率响应函数。

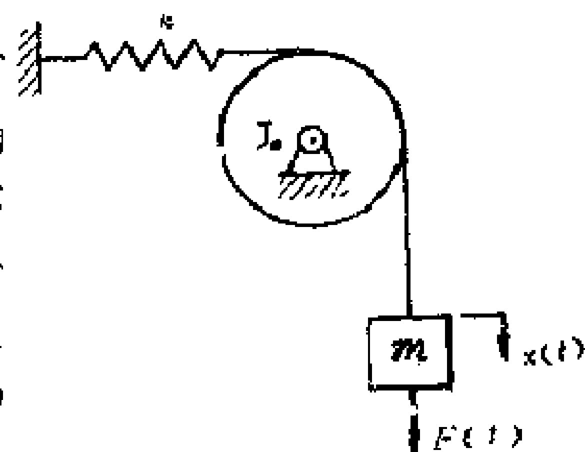


图　1·7

1—8　已知系统的质量m和刚度k_1，k_2，k_3，试求对应于A点的位移输入$y(t)$和质量的位移输出$x(t)$的频率响应函数（图1.8）。

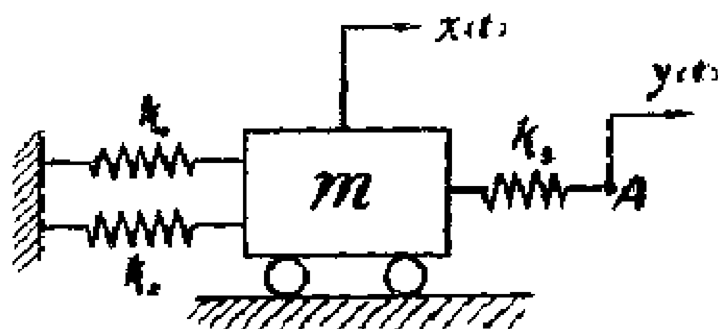


图 1·8

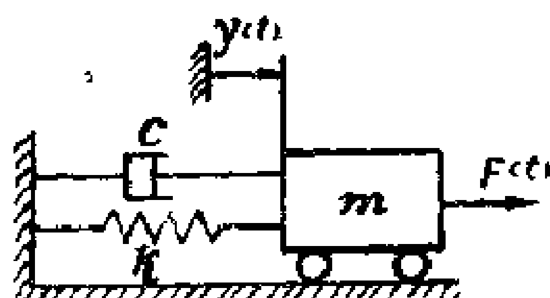


图 1·9

1—9 已知图1.9所示系统的质量m，刚度K，阻尼系数C，试求此系统在力输入$F(t)$作用下，对应于质量振动的位移，速度和加速度的频率响应函数。

1—10 图1.10所示系统，已知m，K，C，其输入可分别是基础的位移$y(t)$，速度$\dot{y}(t)$和加速度$\ddot{y}(t)$，试求对应于不同输出的频率响应函数。

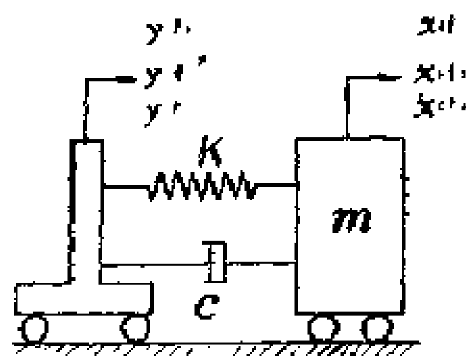


图 1·10

（1）对于绝对位移$x(t)$，速度$\dot{x}(t)$和加速度$\ddot{x}(t)$输出的频率响应函数。

（2）对于相对位移$z(t)=x(t)-y(t)$，相对速度$\dot{z}(t)=\dot{x}(t)-\dot{y}(t)$和相对加速度$\ddot{z}(t)=\ddot{x}(t)-\ddot{y}(t)$输出的频率响应

函数。

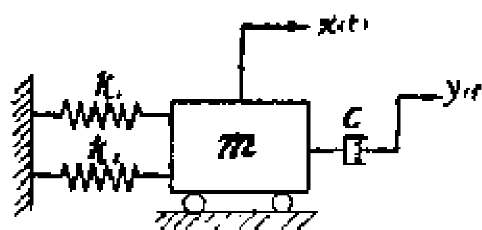


图 1·11

1—11 设$y(t)$是图1.11所示系统的位移输入，其输出是质量m的位移$x(t)$。当已知系统的k_1，k_2，C时，试求系统的频率响应函数。

1—12 设图1.12所示系统的输入是作用在杠杆上的激振力矩M，输出是杠杆的转角θ，试求系统的频率响应函数。已知两小车的质量为m_1，m_2，两弹簧刚度为k_1，k_2，杠杆对转动中心的转动惯量为J。

1—13 发动机汽门机构如图1.13所示，其中已知长度a，b，摇臂对转轴A的转动惯量J，汽门质量m；又知汽门弹簧和挺杆的刚度分别为k_2和k_3。除汽门外所有元件的质

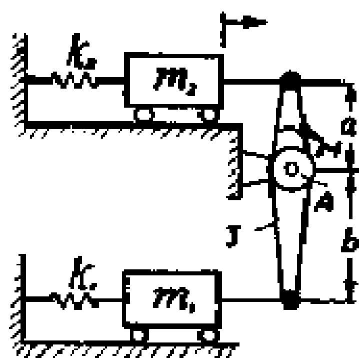


图 1·12

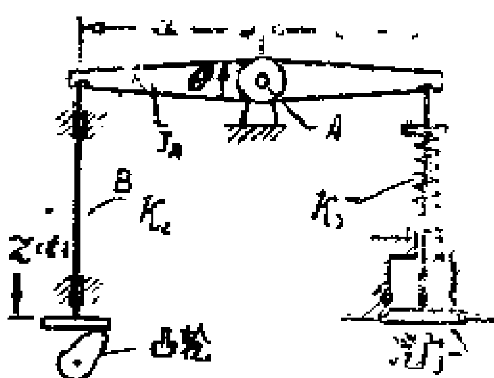


图 1·13

量均忽略不计时，若将凸轮使挺杆B产生的位移$z(t)$作为系统的输入，而将汽门的振动位移$y(t)$作为输出，试求系统的频率响应函数$H(\omega)$。

1—14 粘弹性材料构件动力学特性可近似地用图1.14所示的二个弹簧与粘性阻尼器组成的模型来表示，如构件的输入是随机变力$F(t)$，而响应是位移$x_1(t)$，试求系统的频

率响应函数。

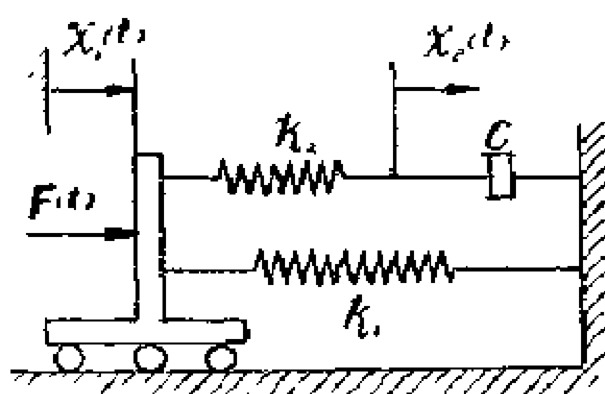
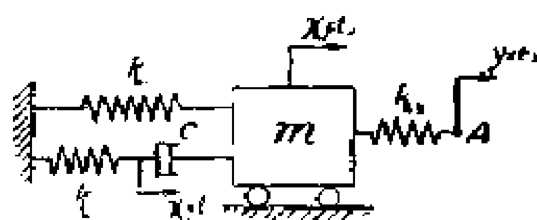


图 1-14

提示：取弹簧k_2与阻尼器连接点的坐标作为附加坐标$x_2(t)$，列出关于$x_1(t)$和$x_2(t)$的两运动方程，消去$x_2(t)$后，再令$F(t)=e^{j\omega t}$，$x_1=H(\omega)e^{j\omega t}$，代入此方程后求$H(\omega)$。

1—15　在图1.15所示系统中，设A点位移$y(t)$是输入，质量的位移$x_1(t)$是输出，试求系统的频率响应函数。



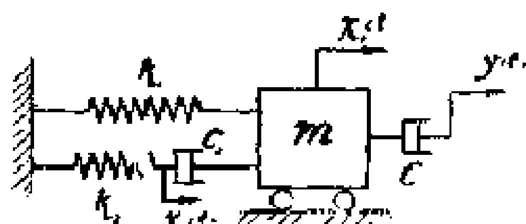


图 1-15　　　　　　图 1-16

1—16　在图1.16所示系统中设$y(t)$是系统的位移输入，$x_1(t)$是位移输出，试求其频率响应函数。

1—17　设系统的脉冲响应函数为

$$h(t)=\begin{cases}\frac{1}{k}e^{-t/k}, & k>0\quad t\geqslant 0;\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

试求系统的频率响应函数。

1—18 设线性系统的输入$x(t)$与输出$y(t)$分别为：

$$x(t)=\begin{cases}e^{-t}, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

$$y(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{a-b}\left[e^{-(b/a)t}-e^{-t}\right], & t\geqslant 0;\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

试求系统的频率响应函数。

1—19 倒置摆受端点A的位移$x(t)$影响而作微小振动，若不计直角杆的重量，已知m，k，l，a，试求对于转角输出φ的频率响应函数。并求当$y(t)=e\cos\omega t$时，转角随时间的变化规律。

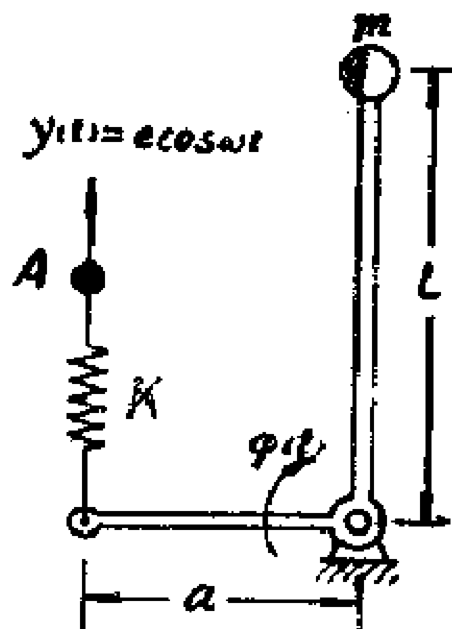


图 1·19

1—20 图1.20是测量飞机升降舵控制片的扭转刚度k_t和固有频率的实验装置，已知控制片绕铰链o的转动惯量为J_0，两激振弹簧的刚度为k_1，k_2，设输入是弹簧端点A的位移，试求系统的频率响应函数。

1—21 振动台重150N，安置在片状弹簧上，此时弹簧片中点之静挠度为$\lambda_s=0.02cm$，振动台之下端联结一弹性系数$k=40N/cm$之弹簧，弹簧下端联结到由马达带动的曲轴上，故弹簧端点的位

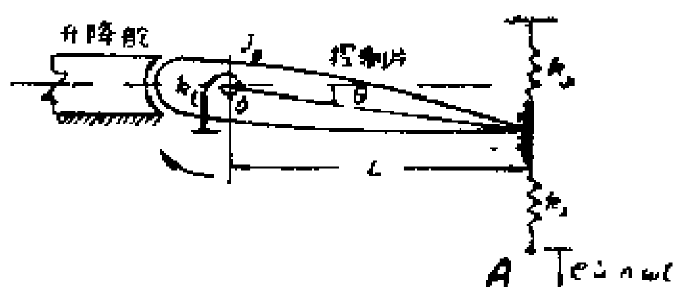


图 1·20

移可表为$e\sin\omega t$，如已知$e=0.5cm$，马达转速$n=500r \cdot p \cdot m$，试用频率响应法求振动台的振幅。

1—22 设图1.22所示系统的输入是支点A随杆AB的铅

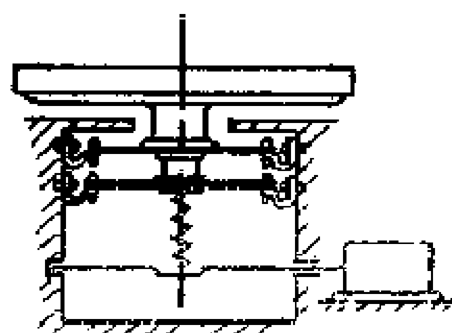


图 1·21

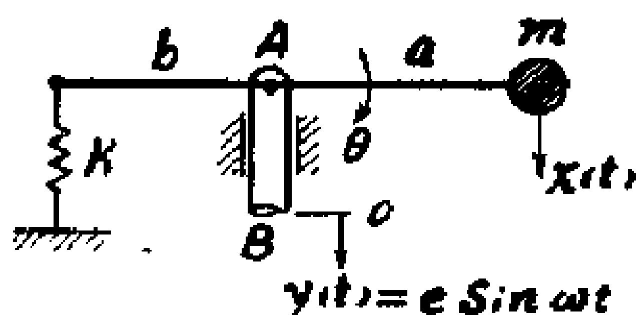


图 1·22

垂位移$y(t)$，输出是杆绕支点A的转角$\theta(t)$和质量m的位移$x(t)$。试求系统的频率响应函数和转角$\theta(t)$及$x(t)$随时间变化规律。

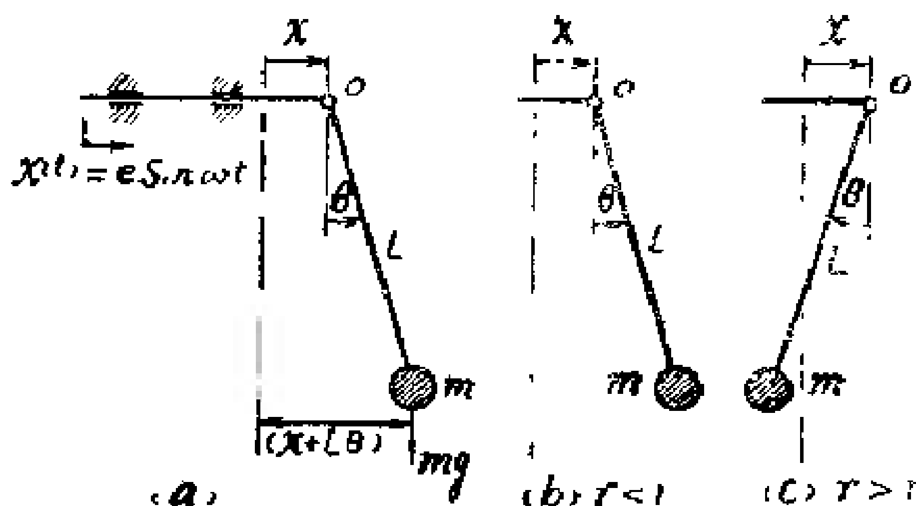


图 1·23

1—23 图1.23中单摆悬点o沿水平方向作简谐运动$x(t)=a\sin\omega t$，试求在微振幅的强迫振动中偏角θ随时间的变化规律。已知摆长为L摆锤的质量为m。

1—24 小车重4900N，可以简化为用弹簧支在轮子上的一个重量，弹性系数$k=500N/cm$，轮子的重量与变形都

略去不计。路面成正弦波形，可以表示为

$$y(t)=r\sin\frac{2\pi x}{L}.$$

其中$r=4cm$，$L=10m$。试求小车在以水平速度$v=36km/h$行驶时，

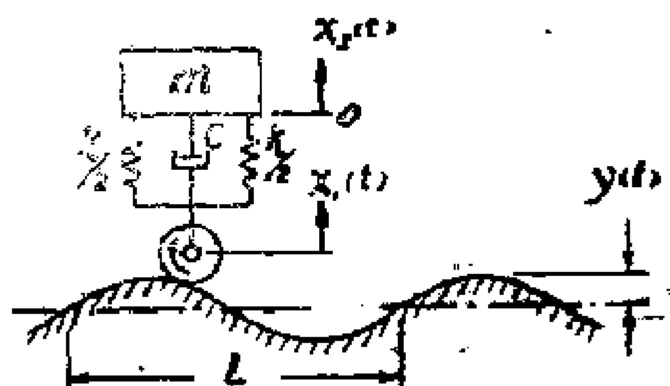


图 1·24

车身上下振动的振幅。设阻尼可以略去不计。

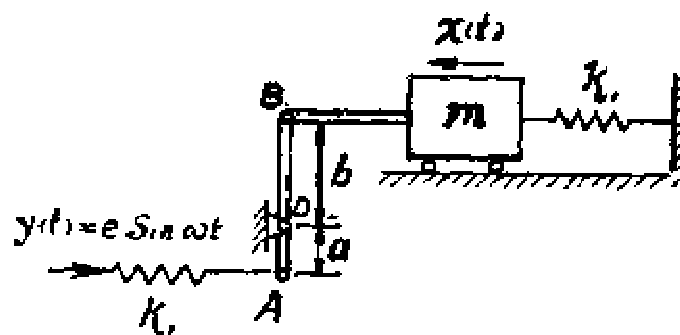


图 1·25

1—25 已知m，k_1，k_2和AB杆绕支点o的转动惯量J_0。试用频率响应法求在运动输入$y(t)=a\sin\omega t$激励下小车的运动规律$x(t)$（图1.25）。

1—26 在图1.26所示系统中，已知两弹簧的刚度为

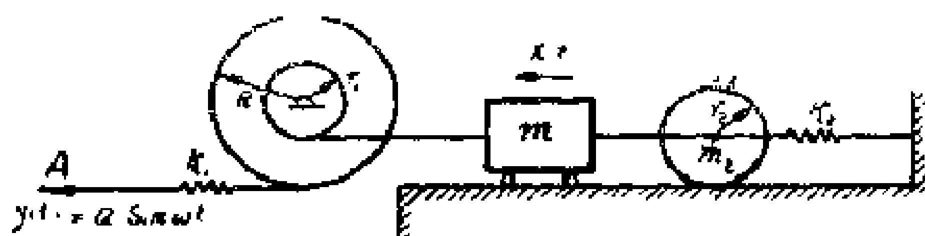


图 1·26

k_1，k_2，小车的质量为m，两个轮子对于其转动中心的转动惯量分别是J_1，J_2，相应的半径为r_1，r_2，R_0。试用频率响

应法求在弹簧端点运动输入 $y(t)=a\sin\omega t$ 激励下小车的振动规律 $x(t)$。

1—27　试求图 1.27 所示周期性矩形波的富氏级数展开式。

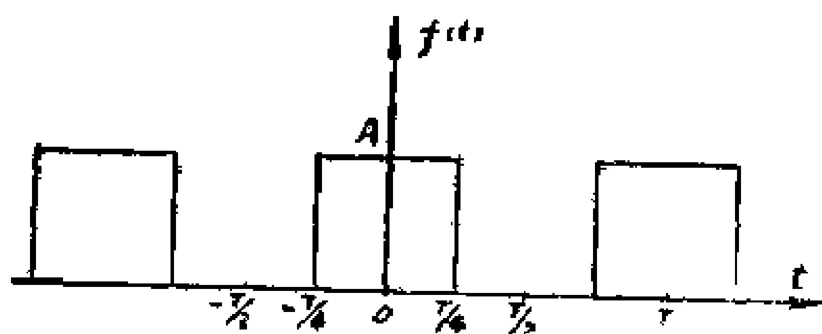


图 1·27

1—28　求图 1.28 所示周期矩形脉冲波的富氏级数展开数。

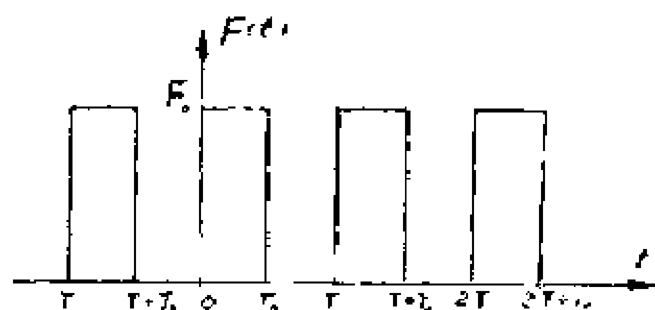


图 1·28

1—29　试将图 1.29 中所示的干扰力 $F(t)$ 展成富氏级数。

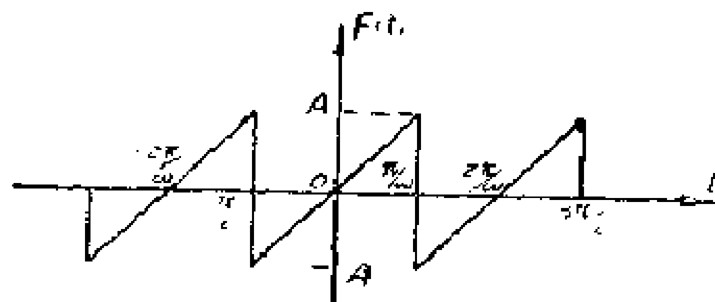


图 1·29

1—30 试将图 1.30 中所表示的干扰力$F(t)$展成富氏级数。

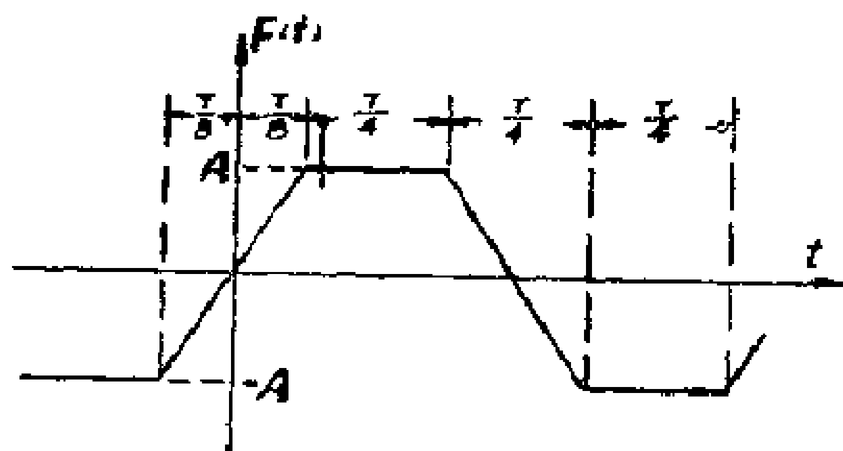


图 1·30

1—31 试将图 1.31 所示的半波整流函数展为富氏级数。

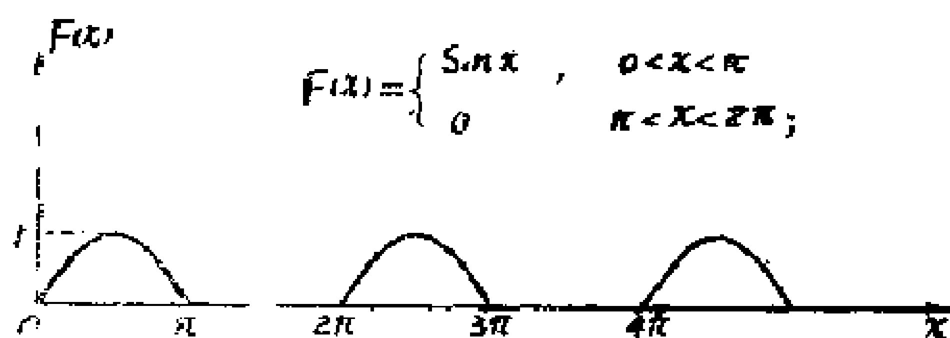


图 1·31

1—32 试将图 1.32 所示的全（正弦）波整流函数展为富氏级数。

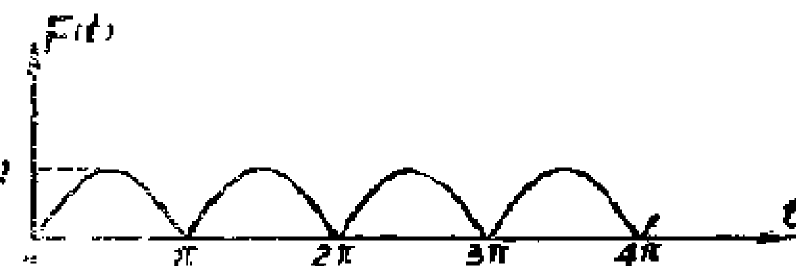


图 1·32

1-33　无阻尼单自由度质量弹簧系统在图1.33所示的周期性三角波干扰力激发下振动。如果选择恰当的质量m和弹簧常数k使固有频率$p=\sqrt{k/m}$与干扰力频率$\omega=2\pi/T$

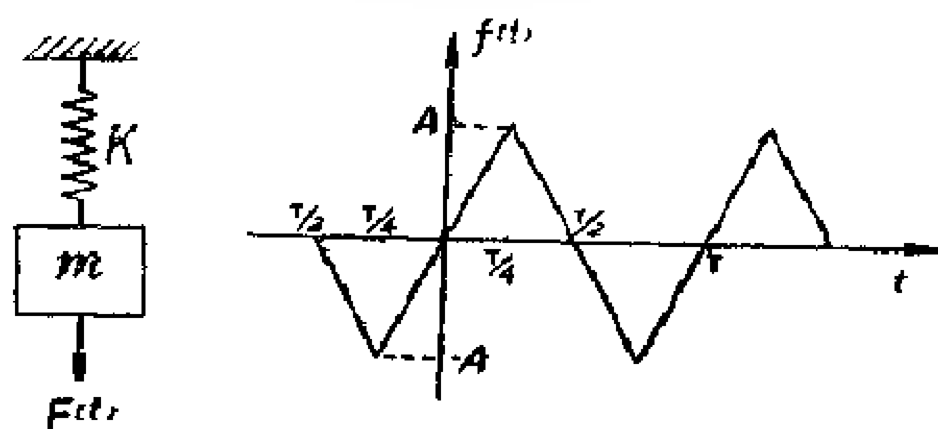


图　1.33

之比$r=\dfrac{\omega}{p}=0.9$试求质量m的稳态强迫振动（图1.33）。

1-34　半径为R质量为m的圆柱可在水平面上无滑动的滚动，在重心处与一端固定的水平弹簧k相联接，如图1.34所示，试求在中心处的矩形波干扰力作用下圆柱体的运动规律。

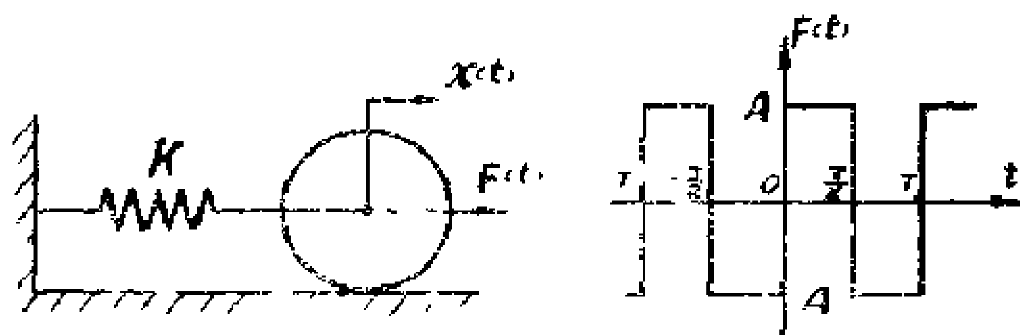


图　1.34

1—35　试求在图1.35(a)所示系统在矩形波激振力作用下，T字杆的转角输出响应。图中k，c，m，T，均是已知的参数，在计算时不计T形杆的质量。

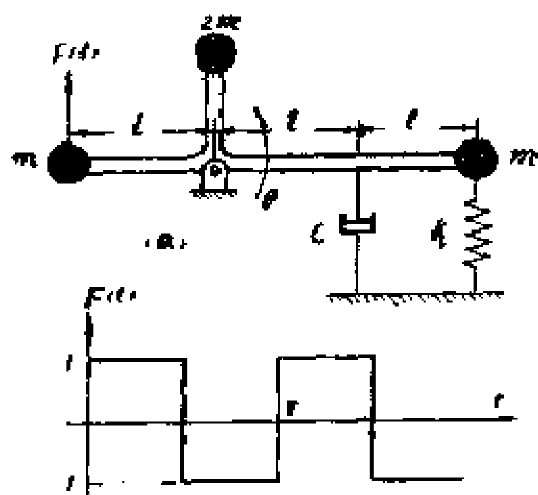


图　1·35

1—36　在图1.36中，凸轮使顶杆D沿水平线按锯齿波的变化规律实现周期运动，通过顶杆上的弹簧k_1使质量m产生强迫振动。已知凸轮的升程为2.5cm，转速为$n=60r \cdot p \cdot m$。$k_1=k_2=3.5KN/m$，$c=0.2KN \cdot s/cm$，$m=20Kg$。试求系统的稳态强迫振动。

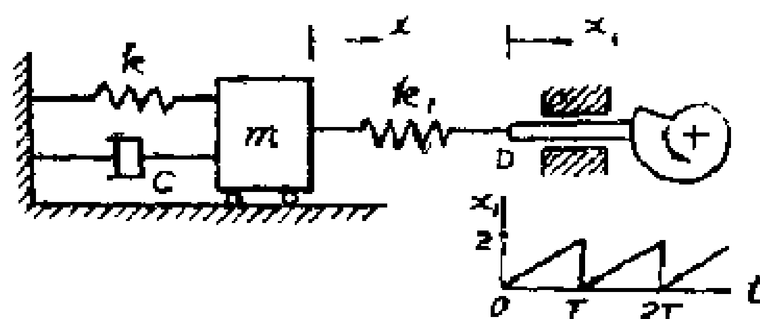


图　1·36

1—37　图1.37所示机械系统的弹簧上端以周期速度运

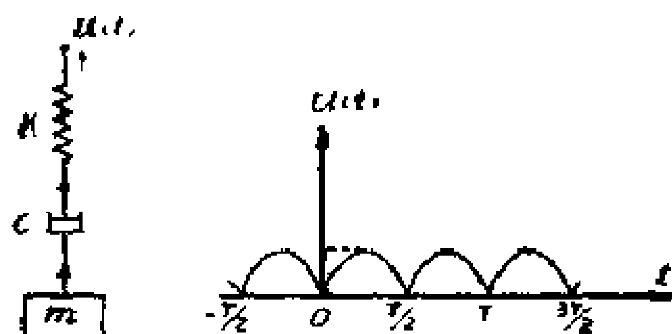


图　1·37

动，设速度的波形是全波整流后的半正弦波，已知m，k，c，试求稳态响应时，作用在质量上的力。

1—38　计算函数$f(t)=\begin{cases}\cos\omega_1 t, & T<t<T\\ 0, & 其余t.\end{cases}$

的富氏变换。

1—39　一刚性直杆，长度为l，杆的一端铰支，另一端由刚度为k弹簧支承，在离铰链支端$l/4$处有一集中质量m，如图1.39所示，如果不计刚性杆本身的质量，试求质量m在矩形脉冲激振力$F(t)$作用下的位移输出响应。

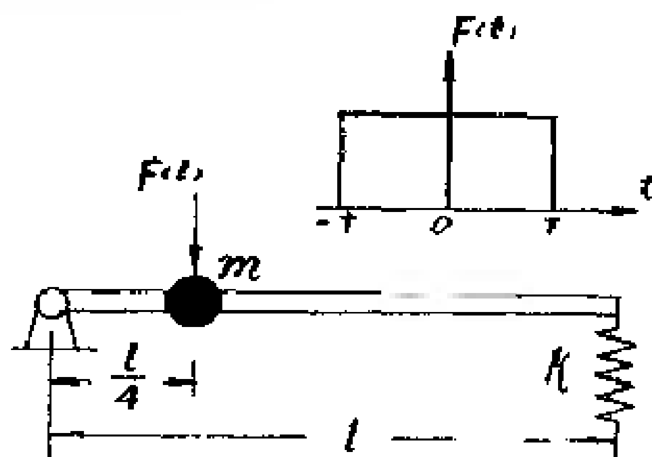


图　1·39

1—40　在图1.39中，若作用在质量m上的激振力是图1.40所示的两个阶跃函数，试用频率响应法计算质量m的位移输出响应。

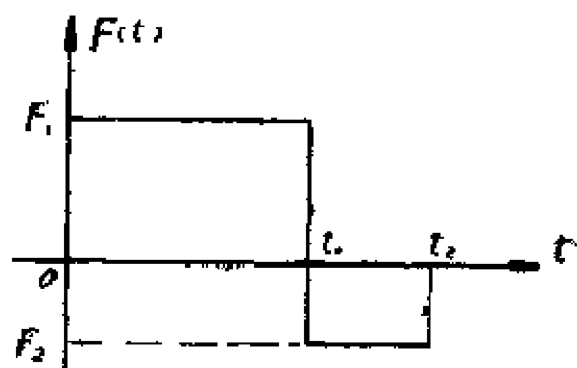


图　1·40

第　二　章

系统的动态特性分析（二）

脉冲响应函数及脉冲响应法

内　容　提　要

§2.1 脉冲响应函数

假设我们考察的系统是稳定的，那么原来处于静止状态的系统在受到一个冲击后，会暂时活跃起来。然后随着时间的推移，又逐渐恢复到静平衡状态。系统对应于在$t=0$时作用的单位冲量所产生的响应$h(t)$，称为系统的脉冲响应函数。由于我们假设在冲量作用之前是静止的，所以当$t<0$时，有$h(t)=0$。

单位脉冲可以用δ函数来表示，在工程上δ函数常定义为：

$$\delta(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ \dfrac{1}{e}, & 0\leqslant t\leqslant e\to 0; \\ 0, & t>e.\end{cases} \tag{2.1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=\int_{-}^{+}\delta(t)dt=1.$$

在应用中δ函数最重要的性质是：

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\delta(t)dt = F(0),$$

或 $$\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\delta(t-\tau)dt = F(\tau). \qquad (2.2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)F(t)dt = -F'(0),$$

或 $$\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\delta^{(n)}(t)dt = (-1)^n F^{(n)}(0); \qquad (2.3)$$

其中，$F(t)$是时间的任意函数。

§2.2 任意干扰作用下的瞬态响应（卷积积分）

设输入系统的激励是时间的任意函数 $F(t)$，则系统的输出$y(t)$可以用它和脉冲响应函数的卷积积分来计算，即

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)F(\tau)d\tau \qquad (2.4)$$

§2.3 单自由度系统脉冲响应函数的计算

在用定义来确定系统的脉冲响应函数时，只应考虑一个单位脉冲的输入作用。由于在单位脉冲作用下系统的运动微分方程式包含有δ函数，因此在求解时，应作特殊的处理。一般是采用对微分方程两端进行从0_-到0_+的跨零积分，利用公式(2.1)的性质将单位脉冲响应函数的作用简化为等效的初始条件。这样所求的脉冲响应函数便是此初始条件激发起的自由振动规律，也就是齐次方程对应于此初始条件的解。

在一般情况下系统的脉冲响应函数可按以下的步骤来计算：

（1） 分析运动，选择广义坐标。

（2） 分析力，建立系统的运动微分方程式。

（3） 用单位脉冲代替原来系统的输入作用。

（4） 采用特殊方法，如从0_-到0_+对全式进行跨零积分求出与单位脉冲等效的初始条件。

（5） 求满足初始条件的齐次方程的解，即系统的脉冲响应函数。

例2.1 由阻尼器和弹性悬臂梁所组成的系统如图12所示，若把作用在悬臂梁自由端的横向力 P 视为激发振动的输入，而将 B 点的振动位移作为系统的输出，试求系统的脉冲响应函数$h(t)$。

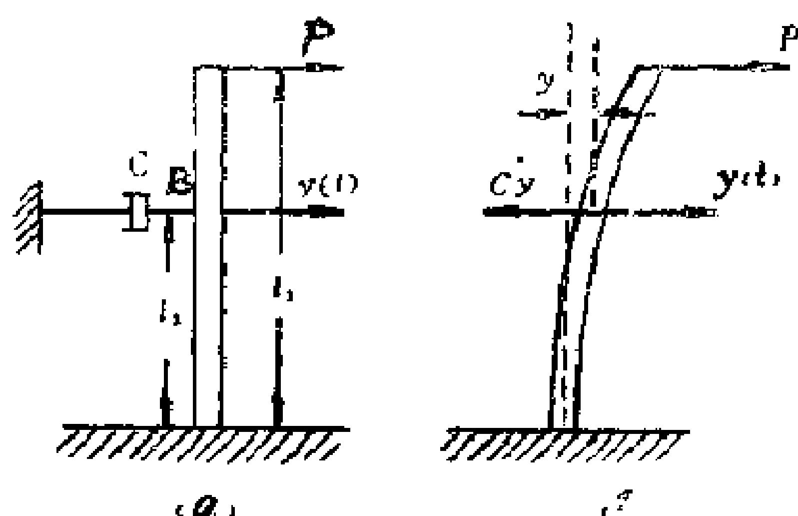


图 12

已知：c，l，l_2。

求：$h(t)$。

解：根据图12（b）所示的受力情况，用材料力学熟知的公式可分别求出B点对应于横向力P和阻力$c\dot{y}$所引起的水平位移

$$y_P = \frac{P}{6EJ}(3l_2^2 l - l_2^3),$$

$$y_c = -\frac{c\dot{y}}{3EJ} l_2^3. \qquad (a)$$

这两力在 B 点引起的变形之和应等于 B 点的总位移，

即 $y_p + y_c = y$. $\qquad (b)$

将 (a) 代入 (b) 得

$$\frac{P}{6EJ}(3l_2^2 l_1 - l_2^3) - \frac{c\dot{y}}{3EJ} l_2^3 = y.$$

简化后得输出和输入的关系方程

$$c\dot{y} + \frac{3EJ}{l_2^3} y = \frac{3l_1 - l_2}{2l_2} P. \qquad (c)$$

用单位脉冲 $P = \delta(t)$ 代替输入 P 作用在系统上，则方程 (c) 变为

$$c\dot{y} + \frac{3EJ}{l_2^3} y = \frac{3l_1 - l_2}{2l_2} \delta(t). \qquad (d)$$

对此方程的两端从 $t = 0_-$ 到 $t = 0_+$ 进行跨零积分，可得

$$c\int_{0_-}^{0_+} \dot{y}\,dt + \frac{3EJ}{l_2^3}\int_{0_-}^{0_+} y\,dt = \frac{3l_1 - l_2}{2l_2}\int_{0_-}^{0_+} \delta(t)\,dt$$

$$= \frac{3l_1 - l_2}{2l_2}. \qquad (e)$$

由于 $t = 0$ 时，B 点的位移 y 不可能无限大，因此第二项积分为零，即

$$\int_{0_-}^{0_+} y\,dt = 0.$$

而第一项积分可表为

$$\int_{0_-}^{0_+} \dot{y}\,dt = \int_{0_-}^{0_+} \frac{dy}{dt}\,dt = \int_{0_-}^{0_+} dy = y(0_+) - y(0_-). \tag{f}$$

假设系统在受冲击前处于静止，则 $y(0_-)=0$，于是(e)式可简化为

$$cy(0_+) = \frac{3l_1 - l_2}{2l_2}.$$

由此可解出冲击后 B 点的初位移，即与单位脉冲等效的初始条件

$$t=0\text{时，}\ y(0_+) = \frac{3l_1 - l_2}{2l_2 c}. \tag{g}$$

由此初始条件便可以从运动微分方程

$$c\dot{y} + \frac{3EJ}{l_2^3}y = 0.$$

求出对应于此初始条件的解

$$\frac{dy}{y} = -\frac{3EJ}{cl_2^3}dt,$$

$$\ln y = -\frac{3EJ}{cl_2^3}t + \ln A,$$

$$y = Ae^{-\frac{3EJ}{cl_2^3}t}.$$

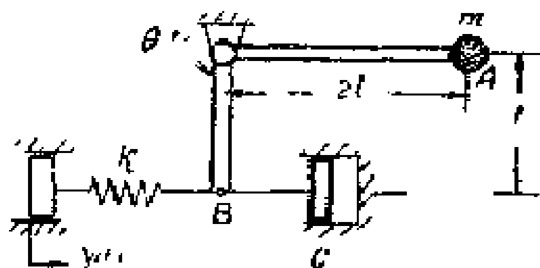
代入初始条件(g)后求得

$$A = \frac{3l_1 - l_2}{2l_2 c}.$$

由此可写出系统的脉冲响应函数

$$h(t)=y(t)=\frac{3l_1-l_2}{2l_2c}e^{-\left(\frac{3EJ}{cl_2^3}\right)t},\quad (t\geqslant 0)$$

例2.2 在图13所示的振动系统中，质量m固定在直角杠杆的长臂端点A上。杠杆的另一端点B与阻尼系数为c的阻尼器和刚度为k的弹簧相联。若将弹簧另一端的位移$y(t)$作为系统的输入，在不计杆的重量时，试求杠杆转角输出$\theta(t)$所对应的脉冲响应函数。



已知：m、k、c、l。

求：$h(\tau)$。

解：由图13所示受力图可列出直角杆绕0点的转动方程

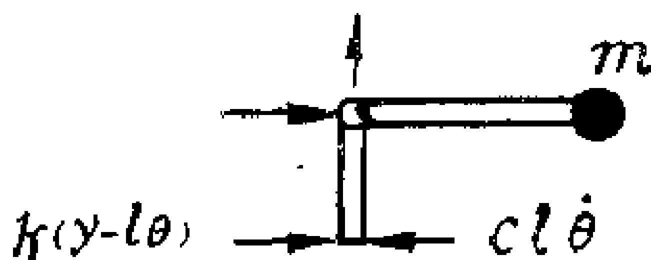


图 13

$$m(2l)^2\ddot{\theta}=k(y-l\theta)l-cl\dot{\theta}\cdot l,$$

或
$$4m\ddot{\theta}+c\dot{\theta}+k\theta=\frac{k}{l}y. \qquad (1)$$

为了求脉冲响应函数$h(\tau)$，令$y=\delta(t)$，并在零初始条件下对方程(1)两端作跨零积分，可得

$$\int_{0-}^{0+}(4m\ddot{\theta}+c\dot{\theta}+k\theta)dt=\int_{0-}^{0+}\frac{k}{l}\delta(t)dt=\frac{k}{l}. \qquad (2)$$

考虑到在趋于零的时间间隔内，系统的角位移$\theta(t)$还来不及发生变化，故上式各项的积分分别为

$$\int_{0-}^{0+}4m\ddot{\theta}dt=\int_{0-}^{0+}4md\dot{\theta}=4m\dot{\theta}\Big|_{0-}^{0+}=4m\dot{\theta}(0_+),$$

$$\int_{0-}^{0+} c\dot{\theta} dt = \int_{0-}^{0+} c\,d\theta = c\theta \Big|_{0-}^{0+} = 0,$$

$$\int_{0-}^{0+} k\theta dt = 0.$$

将以上结果代入（2）式得

$$\dot{\theta}(0_+) = \frac{k}{4ml}.$$

这个关系说明：在$t=0$时作用一个单位脉冲，其效果相当于产生一个初速度$\dot{\theta}(0_+)=\frac{k}{4ml}$后，系统就进行自由衰减振动．因此脉冲响应函数就是微分方程

$$4m\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + k\theta = 0. \qquad (3)$$

满足初始条件 $t=0$，$\theta(0)=0$，$\dot{\theta}(0)=\frac{k}{4ml}$　　（4）

的解：

$$h(t) = \begin{cases} \frac{k}{4mlp'} e^{-\xi p t} \sin p't, & t>0; \\ 0, & t<0. \end{cases} \qquad (5)$$

其中　$p' = p\sqrt{1-\xi^2}$，$p = \sqrt{\frac{k}{4m}}$，

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{4mk}} = \frac{c}{4\sqrt{mk}}.$$

对于具有一个输入 $x(t)$ 和一个输出 $y(t)$ 的系统，当描述系统动力特性的微分方程包含有输出的高阶导数时，即

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y = x(t), \qquad (a)$$

仍可用解前两例题相似的方法来确定脉冲响应函数，即在零初始条件下，用单位脉冲$\delta(t)$代替输入对系统的作用，然后再对微分方程

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y = \delta(t)。$$

两端取跨零积分，便可得到与单位脉冲作用等效的条件

$$y^{(n-1)}(0) = \frac{1}{a_0}.$$

于是所求的脉冲响应函数$h(\tau)$便是齐次方程

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y = 0,$$

满足初始条件 $t=0$时，$y(0) = y'(0) = y''(0) = \cdots = y^{(n-2)}(0) = 0$，$y^{(n-1)}(0) = \dfrac{1}{a_0}$的解，即 $h(\tau) = y(\tau)$。

如果描述系统动力特性的方程，不但包含有输出的高阶导数，同时还包含有输入的高阶导数，即有

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} y(t) = b_0 x^{(m)}(t) + b_1 x^{(m-1)}(t) + \cdots + b_{m-1} x(t),$$

在这种情况下，若用单位脉冲代替输入 $x(t)$来求响应就比较麻烦，若把与输入有关的右端部分视为一个输入，即

$$F(t) = b_0 x^{(m)}(t) + b_1 x^{(m-1)}(t) + \cdots + b_{m-1} x(t), \quad (b)$$

再用单位脉冲 $\delta(t)$代替$F(t)$，求出与方程(a)相同的脉冲响应函数 $h_0(\tau)$，由脉冲响应函数的定义，用公式(2.4)便可求得与方程(b)相对应的脉冲响应函数

$$h(t) = \int_0^t h_0(t-\tau)[b_0 \delta^{(m)}(\tau) + b_1 \delta^{(m-1)}(\tau) + \cdots + b_{m-1} \delta(\tau)] d\tau.$$

根据δ函数的导数公式(2.3)可将上式简化为

$$h(\tau) = b_{m-1} h_0(\tau) - b_{m-2} h_0'(\tau) + \cdots + (-1)^{m-1} b_0 h_0^{(m-1)}(\tau). \quad (2.5)$$

例2.3 试求动态特性由方程

$$\ddot{y}(t)+2n\dot{y}(t)+p^2y(t)=c\dot{x}(t)+kx(t) \quad (1)$$

描述的线性系统的脉冲响应函数$h(\tau)$。

解： 先用$F(t)=c\dot{x}(t)+kx(t)$ 代替方程(1)的所有右端项，则(1)式简化为

$$\ddot{y}+2n\dot{y}+p^2y=F(t). \quad (2)$$

为了求对应于输入$F(t)$的脉冲响应函数 $h_F(\tau)$，用单位脉冲$\delta(t)$代替$F(t)$对系统的作用，并在零初始条件下，对(2)式两端作跨零积分，利用例 2.2 中相似的方法就可求得在小阻尼($n<p$)下对应于输入$F(t)$的脉冲响应函数

$$h_F(\tau)=\frac{1}{p'}e^{-n\tau}\sin p'\tau, \quad (3)$$

其中 $p'=p\sqrt{1-\xi^2}$，$\xi=n/p$。

根据脉冲响应函数的定义用$\delta(t)$代替$x(t)$作为系统的输入，此时系统的输出就是脉冲响应函数，即

$$h(\tau)=\int_0^t h_F(t-\tau)[c\dot{\delta}(\tau)+k\delta(\tau)]d\tau$$

$$=kh_F(\tau)+c\dot{h}_F(\tau)$$

$$=\frac{k}{p'}e^{-n\tau}\sin p'\tau-c\frac{n}{p'}e^{-n\tau}\sin p'\tau+ce^{-n\tau}\cos p'\tau$$

$$=\left(\frac{k-cn}{p'}\sin p'\tau+c\cos p'\tau\right)e^{-n\tau}.$$

§2.4 脉冲响应法

应用脉冲响应函数$h(t)$求解振动响应的方法称为脉冲响应法。使用这种方法的解题步骤如下：

（1） 分析力和运动。

（2） 分析系统的输出，输入关系。

（3） 确定系统的脉冲响应函数$h(t)$。

（4） 利用公式（2.4）作卷积积分，求系统的输出响应（对不连续的或分段函数，应分段进行积分）。

例2.4 在例2.1问题中，若悬臂梁的自由端在$t=0$时，突然有持续时间为T，强度为a的阶跃干扰力作用在系统上，试求B点的水平振动规律（图14）。

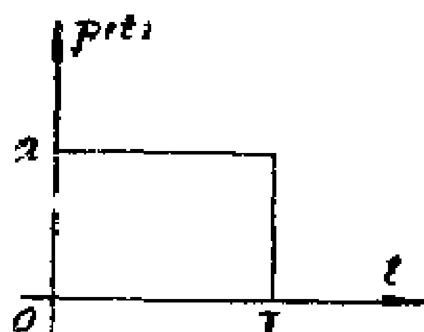


图 14

已知：c，l，l_2，a，T，

$$p(t)=\begin{cases} a, & 0\leqslant t\leqslant T; \\ 0, & t<0,\ t>T. \end{cases}$$

求：$y(t)$。

解：由例2.1已求出系统的脉冲响应函数

$$h(t)=\frac{3l_1-l_2}{2l_2c}e^{-\frac{3EJ}{cl_2^3}t}. \quad (t\geqslant 0)$$

根据(2.4)式分别求以下三个时间间隔内的响应

$$t<0\text{时，}\ y(t)=\int_{-\infty}^{t}h(t-\tau)p(\tau)d\tau=0;$$

$$0<t<T\text{时，}\ y(t)=\int_0^t h(t-\tau)p(\tau)d\tau$$

$$=\int_0^t\frac{3l_1-l_2}{2l_2c}e^{-\frac{3EJ}{cl_2^3}(t-\tau)}a\,d\tau.$$

$$=\frac{(3l_1-l_2)a}{2l_2c}e^{-\frac{3EJ}{cl_2^3}t}\int_0^t e^{\frac{3EJ}{cl_2^3}\tau}d\left(\frac{3EJ}{cl_2^3}\tau\right)\frac{cl_2^3}{3EJ}$$

$$=\frac{(3l_1-l_2)al_2^2}{6EJ}e^{-\frac{3EJ}{cl_2^3}t}\left[e^{\frac{3EJ}{cl_2^3}t}-1\right]$$

$$=\frac{al_2^2(3l_1-l_2)}{6EJ}\left[1-e^{-\frac{3EJ}{cl_2^3}t}\right];$$

$$y(t)=\int_0^t h(t-\tau)p(\tau)d\tau \qquad t\geqslant T\text{时，}$$

$$=\int_0^T h(t-\tau)ad\tau+\int_T^\infty h(t-\tau)\cdot ad\tau$$

$$=a\frac{3l_1-l_2}{2cl_2}e^{-\frac{3EJ}{cl_2^3}t}\int_0^T e^{\frac{3EJ}{cl_2^3}\tau}d\left(\frac{3EJ}{cl_2^3}\tau\right)\frac{cl_2^3}{3EJ}$$

$$=\frac{al_2^2(3l_1-l_2)}{6EJ}e^{-\frac{3EJ}{cl_2^3}t}\left[e^{\frac{3EJ}{cl_2^3}T}-1\right]$$

$$=\frac{al_2^2(3l_1-l_2)}{6EJ}\left[e^{-\frac{3EJ}{cl_2^3}(t-T)}-e^{-\frac{3EJ}{cl_2^3}t}\right].$$

例2.5 在图 15 所示的振动系统中，平面凸轮的表面曲线是一个半周期的正弦曲线。当凸轮以不变的速度V移动时，推杆A点上升的规律为

$$y(t)=\begin{cases}a\sin\omega V_0 t, & 0\leqslant t\leqslant t_1=\dfrac{\pi}{\omega V_0};\\ 0, & t>t_1。\end{cases}$$

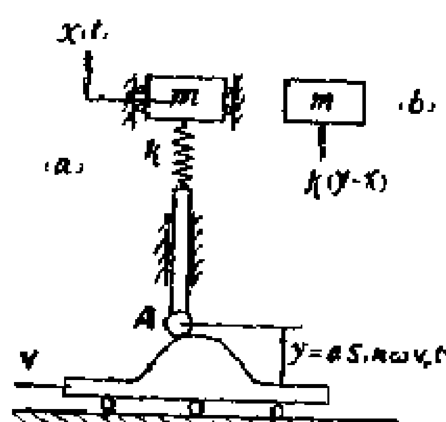


图 15

若重物的质量为m和弹簧的刚度为k，试用脉冲响应法，求凸轮等速运动时质量的振动规律。

已知：m，k，$y(t)=\begin{cases} a\sin\omega_0 t, & 0<t\leqslant t_1=\dfrac{\pi}{\omega_0}; \\ 0, & t>t_1. \end{cases}$

求：$x(t)$。

解：由图15(b)所示受力图，根据牛顿定律可列出质量m的运动微分方程

$$m\ddot{x}=k(y-x),$$

或
$$m\ddot{x}+kx=ky. \qquad (1)$$

为了求对应于输入$y(t)$的脉冲响应函数，可令$y=\delta(t)$并在零初始条件下，对方程(1)的两端取跨零积分，即

$$\int_{0_-}^{0_+}(m\ddot{x}+kx)dt=\int_{0_-}^{0_+}k\delta(t)dt=k, \qquad (2)$$

当$t=0_-$时，$\dot{x}(0_-)=0$和$x(0_-)=0$，并注意在极短的时间间隔内质量还来不及发生位移，即$x(0_+)=0$，则(2)式右端的积分为

$$\int_{0_-}^{0_+}m\ddot{x}dt=\int_{0_-}^{0_+}m\,d\dot{x}=m\dot{x}(0_+)-m\dot{x}(0_-)=m\dot{x}(0_+),$$

$$\int_{0_-}^{0_+}kx\,dt=0.$$

将它们代入(2)式，便可求出与单位脉冲等效的初始条件。

$$当t=0时\ \dot{x}(0_+)=\frac{k}{m}=p^2,$$

于是，所求的脉冲响应函数应是齐次方程

$$m\ddot{x}+kx=0,$$

满足初始条件$t=0$时$x(0)=0$和$\dot{x}(0)=p^2$的解

$$h(\tau)=\frac{\dot{x}(0)}{p}\sin pt=p\sin pt.$$

当$0\leqslant t\leqslant t_1$时，$y(t)=a\sin wV_0 t$，$x(0)=\dot{x}(0)=0$，由公式(2.4)可得

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \int_0^t y(\tau)h(t-\tau)d\tau \\
&= \int_0^t a\sin wV_0\tau\cdot p\sin p(t-\tau)d\tau \\
&= ap\int_0^t \sin wV_0\tau\sin p(t-\tau)d\tau \\
&= ap\cdot\frac{1}{2}\int_0^t \{\cos[(wV_0+p)\tau-pt] \\
&\quad -\cos[(wV_0-p)\tau+pt]\}d\tau \\
&= \frac{ap}{2}\left\{\frac{\sin[(wV_0+p)\tau-pt]}{wV_0+p}\right. \\
&\quad \left.-\frac{\sin[(wV_0-p)\tau+pt]}{wV_0-p}\right\}_0^t \\
&= a\left(\sin wV_0 t-\frac{wV_0}{p}\sin pt\right)\frac{1}{1-(wV_0)^2/p^2}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

如果 $wV_0=p$，则

$$
x(t)=\frac{a}{2}(\sin wV_0 t-wV_0 t\cdot\cos wV_0 t), \tag{4}
$$

质量m具有最大位移x_{max}的时刻t_m可以由

$$
\dot{x}(t)=\frac{ap^2}{p^2-(wV_0)^2}(wV_0\cos wV_0 t_m
$$

$$
-wV_0\cos pt_m)=0,
$$

$$
\cos wV_0 t_m-\cos pt_m=-2\sin\frac{1}{2}(wV_0+p)t_m\times
$$

$$
\sin\frac{1}{2}(wV_0-p)t_m=0.
$$

求得 $$t_m = \frac{2n\pi}{p \pm wV_0}, \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots. \tag{5}$$

当 $t_m = \dfrac{2n\pi}{p + wV_0}$ 时，令 $\dfrac{wV_0}{p} = r$，则有

$$\sin pt_m = \sin\left(p\frac{2n\pi}{p + wV_0}\right) = \sin\frac{2n\pi}{1 + r}$$

$$\sin wV_0 t_m = \sin 2\pi n\frac{wV_0}{p + wV_0} = \sin\left(2\pi n\frac{r}{1 + r}\right)$$

$$= \sin\left(2\pi n\frac{r + 1 - 1}{1 + r}\right) = \sin 2\pi n\left(1 - \frac{1}{1 + r}\right)$$

$$= -\sin\frac{2\pi n}{1 + r}.$$

可见 $\sin pt_m = -\sin wV_0 t_m$。 (6)

将(5)，(6)代入(3)可求得质量m的极大值

$$x_m = \frac{a}{1 - (wV_0/p)^2}(1 + wV_0/p)\sin\frac{2\pi n wV_0}{p + wV_0}$$

$$= \frac{a}{1 - r}\sin\frac{2\pi n r}{1 + r},$$

或 $$\frac{x_m}{a} = \frac{1}{1 - r}\sin\frac{2n\pi r}{1 + r}. \tag{7}$$

当 $t_m = \dfrac{2n\pi}{p - wV_0}$ 时，同样可求得

$$\frac{x_m}{a} = \frac{1}{1 + r}\sin\frac{2n\pi r}{1 - r}. \tag{8}$$

由(7)，(8)两式可以看出，当n为任何正整数时，(7)式决定了质量m在$t = \dfrac{2\pi n}{p + wV_0}$处有极大的位移$x_{max}$。由

(7)式可画出半周期正弦脉冲的冲击谱。如图16所示。

当$t>t_1$时，$y_1(t)=a\sin\omega V_0 t$，$y_2(t)=0$，$x(0)=\dot{x}(0)=0$。由公式(2.4)可得：

$$x(t)=\int_0^{t_1} y_1(\tau)h(t-\tau)d\tau+\int_{t_1}^{t} y_2(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$=ap\int_0^{t_1}\sin\omega V_0\tau\sin p(t-\tau)d\tau$$

$$=\frac{ra}{1-r^2}[\sin pt+\sin p(t-t_1)], \qquad p\neq\omega V_0,$$

$$a(\sin p_n t \quad \pi\cos p_n t), \qquad p=\omega V_0.$$

同样可求得在$t>t_1$时，质量m最大位移的表达式

$$\frac{x_{max}}{a}=\frac{2r}{r^2-1}\cos\frac{\pi}{2r}. \qquad (9)$$

由(9)式可画出半周期正弦脉冲在$t>t_1$时的冲击谱如图16中的虚线所示。

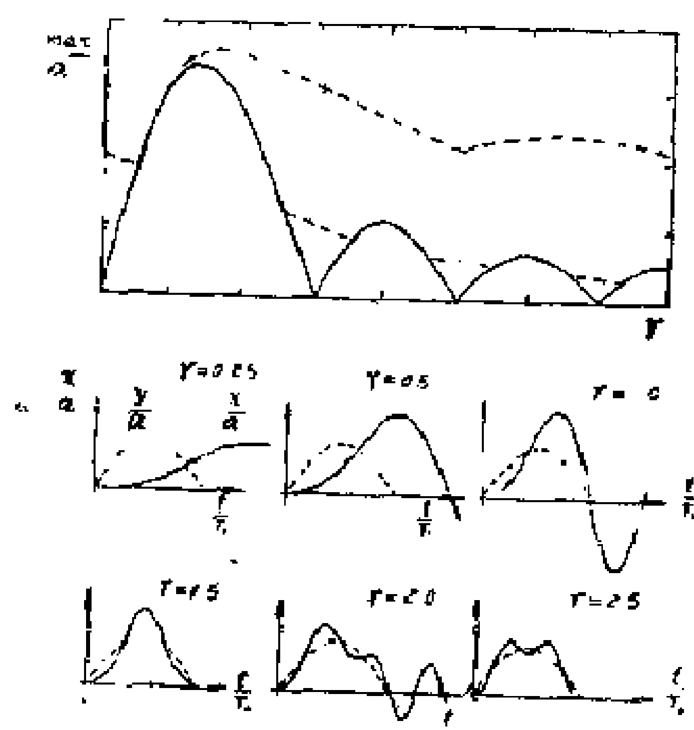


图 16

由(7)、(9)两式可以看出质量的位移响应的最大值取决于p和ωV_0的大小，它有时产生在脉冲过程中，如图16(a)，有时产生在脉冲结束以后。如图16(b)。

例2.6 质量为m的仪表，由刚度为k的弹簧悬置在木箱内如图17所示。预计在运输过程中，木箱可能从高度为h处落到坚硬的地面上，试求可能传到仪表上的最大力。假定木箱的质量远大于m，因而仪表的运动不影响木箱的自由降落，而且木箱着地后即静止在地面上，不回跳，阻尼可以略去不计。

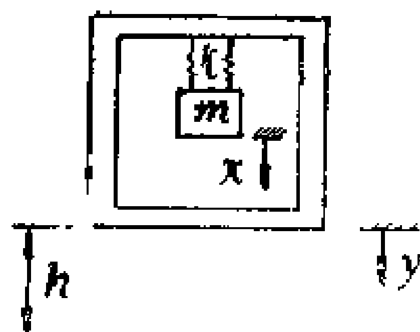


图 17

已知：m，k，h。

求：N_{max}。

解：令x与y分别代表质量m与木箱的绝对位移，z代表质量m对于木箱的相对位移。在自由降落过程中，仪表的运动微分方程为

$$m\ddot{x} = -k(x-y), \qquad (1)$$

将$z = x - y$代入(1)式可得

$$\ddot{z} + p^2 z = -\ddot{y}.$$

其中

$$p = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

取开始降落的瞬时为$t = 0$，并假定初始条件为$z = 0$，$\dot{z} = 0$。在木箱自由降落中$y = \frac{1}{2}gt^2$，$\ddot{y} = g$，由公式(2.4)可计算出在自由降落中质量相对于壳体的位移和速度：

$$z = -\frac{g}{p}\int_0^t \sin p(t-\tau)d\tau = -\frac{g}{p^2}(1-\cos pt),$$

$$\dot{z} = -\frac{g}{p}\sin pt.$$

设木箱着地的瞬时为t_1，则$t_1 = \sqrt{2h/g}$，刚在这瞬时之

前，仪表的相对位移与相对速度为

$$z_1 = \frac{g}{p^2}(1 - \cos pt_1),$$

$$\dot{z}_1 = -\frac{g}{p}\sin pt_1.$$

在木箱着地的瞬间，仪表的相对速度突然增大了 $\dot{y}(t_1) = gt_1$，而相对位移保持着地前的值不变。改取瞬时 t_1 为初始瞬时，则木箱着地后仪表的相对运动方程为：

$$z = \frac{\dot{z}_1}{p}\sin pt + z_1\cos pt$$

$$= \left(\frac{gt_1}{p} - \frac{g}{p^2}\sin pt_1\right)\sin pt$$

$$+ \frac{g}{p^2}(1 - \cos pt_1)\cos pt = A\sin(pt + \varphi).$$

其中

$$A = \frac{g}{p^2}\sqrt{(pt_1 - \sin pt_1)^2 + (1 - \cos pt_1)^2};$$

$$\varphi = \mathrm{tg}^{-1}\frac{1 - \cos pt_1}{pt_1 - \sin pt_1}.$$

由此可以算出弹簧传到仪表上的最大力 $N_{max} = kA$，此力发生有瞬时 $pt - \varphi = \frac{\pi}{2}$，即 $t = \left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)/p$。

例2.7 拖车是一个复杂的多自由度系统，在作初步近似计算时，可简化成图18所示的在粗糙路面上行驶的力学模型，即假设：①拖车只有沿铅垂方向振动的一个自由度；②不计轮胎的弹性；③在行驶中轮胎不离开路面。若拖车满载时的质量 $m = 1000kg$ 悬挂弹簧的刚度 $k = 350KN/m$，阻尼因

系数ξ=0.5，试求拖车以$V=36km/h$的速度爬$\alpha=30°$的坡道时，拖车的振动规律。

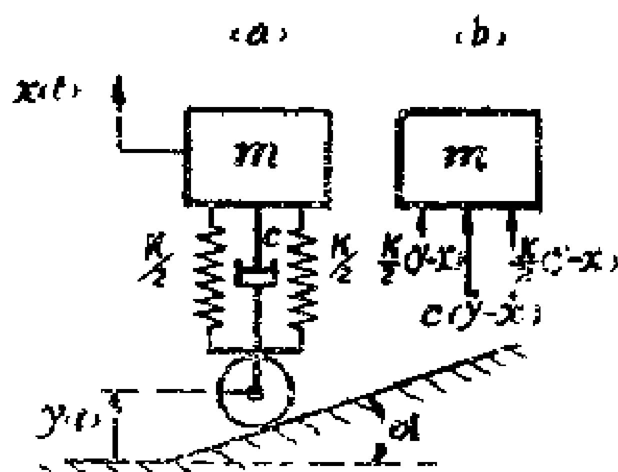


图 18

已知：$m=1000kg$，$k=350kN/m$，$\xi=0.5$

$\alpha=30°$，$V=36km/h$。

求：$x(t)$。

解：由图18(b)所示的受力图，根据牛顿定律可列出拖车的运动微分方程式

$$m\ddot{x}=c(\dot{y}-\dot{x})+k(y-x),$$

或
$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=c\dot{y}+ky. \qquad (1)$$

令
$$F(t)=c\dot{y}+ky, \qquad (2)$$

作为一个总的输入，然后用例2.2中相似的方法，便可求得对应于总输入$F(t)$的脉冲响应函数

$$h(\tau)=\frac{1}{mp'}e^{-\xi p\tau}\sin p'\tau, \qquad (3)$$

其中
$$p'=p\sqrt{1-\xi^2}=18.7\sqrt{1-0.5^2}=16.2;$$

$$p=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{350000}{1000}}=18.7rad/s;$$

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = 0.5.$$

根据题意，可以把路面输入表示为

$$
\begin{aligned}
y &= Vt\sin\alpha, \\
\dot{y} &= V\sin\alpha,
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

将(2)～(4)式代入(2.4)式中，可得

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \int_0^t F(\tau)h(t-\tau)d\tau \\
&= \int_0^t [c\dot{y}(\tau)+ky(\tau)]h(t-\tau)d\tau \\
&= \frac{V\sin\alpha}{mp'}\Big\{ c\int_0^t e^{-\xi p(t-\tau)}\sin p'(t-\tau)d\tau \\
&\quad + k\int_0^t \tau e^{-\xi p(t-\tau)}\sin p'(t-\tau)d\tau \Big\} \qquad (5)
\end{aligned}
$$

引入变量$u=t-\tau$，将(5)式化为

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{V\sin\alpha}{mp'}\Big\{ (c+kt)\int_0^t e^{-\xi pu}\sin p'u\,du \\
&\quad - k\int_0^t ue^{-\xi pu}\sin p'u\,du \Big\} \\
&= \frac{V\sin\alpha}{mp'}\Big\{\Big[-(c+kt)\frac{e^{-\xi pu}}{p'^2+\xi^2p^2}(\xi p\sin p'u \\
&\quad - p'\cos p'u)\Big]_0^t + \frac{k}{p^2}e^{-\xi pu}\Big[u(\xi p\sin p'u \\
&\quad + p'\mathrm{con}\,p'u) + \frac{1}{p^2}(\xi^2p^2-p'^2)\sin p'u \\
&\quad + \frac{1}{p^2}2\xi pp'\cos p'u\Big]_0^t\Big\} \\
&= \frac{V\sin\alpha}{p'}\Big\{\frac{p^2t+2\xi p}{p^2}\Big[p' - e^{-\xi pt}(\xi p\sin p't
\end{aligned}
$$

$$+ p'\cos p't)\Big] + e^{-\xi pt}\Big[\, t(\xi p\sin p't$$

$$+ p'\cos p't) + \frac{1}{p^2}(\xi^2p^2 - p'^2)\sin p't$$

$$+ \frac{2\xi pp'}{p^2}\cos p't\Big] + \frac{2\xi p'}{p}\Big\}$$

$$- V_0\sin\alpha' t - \frac{1}{p'}e^{-\xi pt}\sin p't\Big),$$

代入已知数据后，得

$$x(t) = 5\Big[t - \frac{1}{16.2}e^{-3.3t}\sin(16.2t)\Big].$$

习 题 二

2—1　图 2.1 所示弹簧阻尼系统，已知刚度 k 和阻尼系数 c，设弹簧端点输入的位移为 $y(t)$，活塞杆输出的位移是 $x(t)$（不计活塞与杆的质量）。试求此系统的脉冲响应函数。

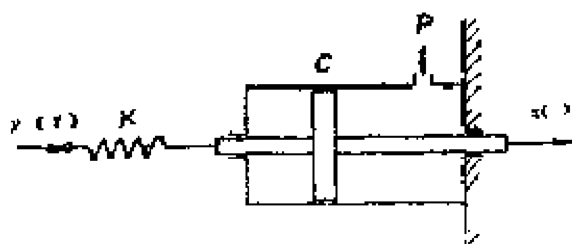


图 2.1

2—2　图 2.2 所示的液压缸，活塞杆带动具有弹性系数为 k 的弹性负载和阻尼系数为 c 的阻尼负载，试求以压力 p 为输入量，而以活塞位移 x 为输出量的脉冲响应函数。设活塞面积为 A，且不计活塞与杆的质量。

2—3　设图 2.3 所示系统的输入是无质量小车 A 的位移 $y(t)$，输出是无质量小车 B 的位移 $x(t)$，已知弹簧刚度 k

和阻尼系数 c，试求此系统的脉冲响应函数。

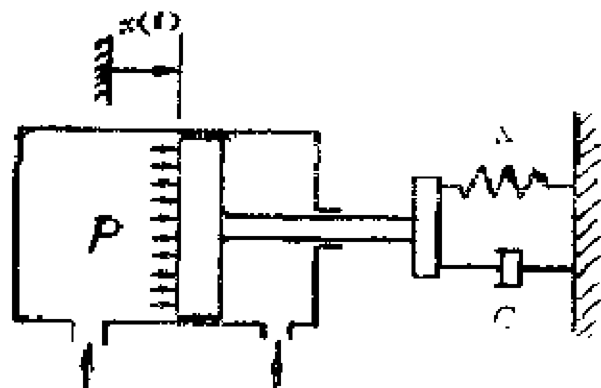


图 2·2

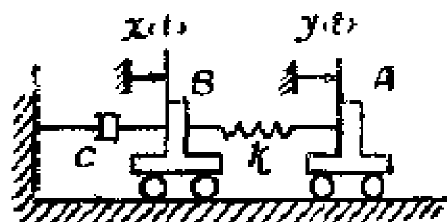


图 2·3

2－4　试求在干扰力 $F(t)$作用下对应于图1.1所示的无质量小车位移输出的脉冲响应函数。

2－5　在图2.5(a)所示的 RC 串联电路中，可将外加电动势 $e(t)$看成是这个系统（即RC电路）随时间 t 变化的输入激励函数，把电容器两端的电压 $u_c(t)$ 看成是这个系统随时间 t 变化的输出响应函数。试求此系统（RC电路）的脉冲响应函数。

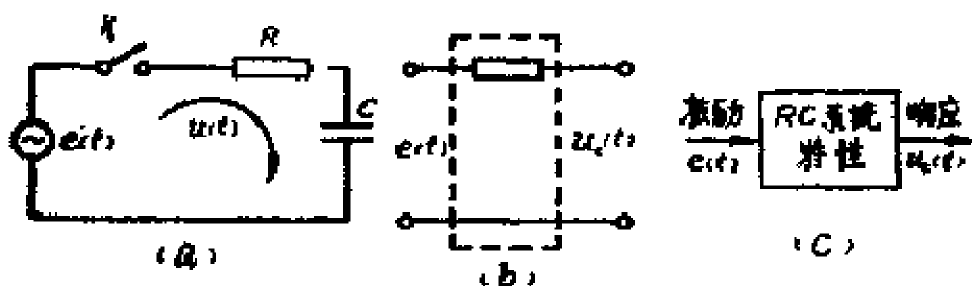


图 2·5

提示：可根据基尔霍夫(Kirchhoff)定律列出电容器两端的电压$u_c(t)$应满足的微分方程

$$RC\frac{du}{dt}+u=e(t)$$

2－6　无质量的小车用刚度为k_1的弹簧和阻尼弹性元件k_2，c 与固定支座相连如图2.6 所示，试求在输入激振力

$F(t)$作用下，对应于小车位移输出的脉冲响应函数。

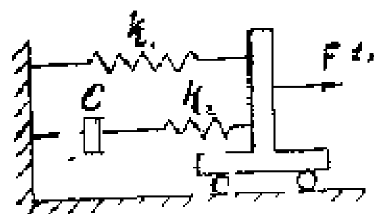


图 2·6

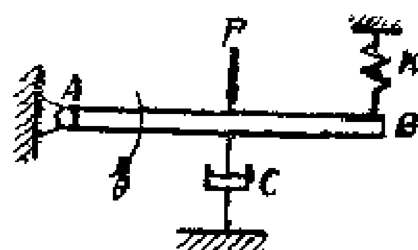


图 2-7

2—7　无质量的刚性杆 AB 可绕铰链 A 转动，另一端 B 悬于刚度为 K 的弹簧下端，杆的中点有一个阻尼系数为 c 的阻尼器。设杆在中点处的集中力作用下而产生振动，试求对应于杆的转角输出的脉冲响应函数。

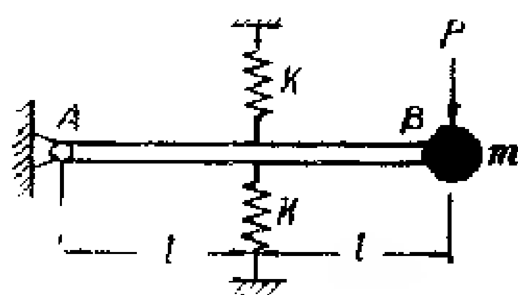


图 2-8

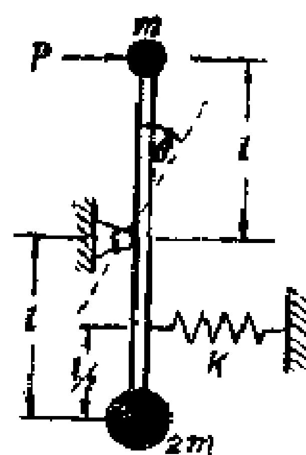


图 2·9

2—8　无质量刚性杆 AB 的一端固定一质量 m，另一端用铰链与墙壁相联，杆的中点支承在刚度为 K 的两个弹簧之间，如图 2.8 所示。设系统在端点集中干扰力 P 作用下振动，试求对应于杆的转角输出的脉冲响应函数。

2—9　图2.9中一根长度为$2l$的无重量刚杆，它的中点支承于一铰链支座上，上端带有集中质量 m，下端带有集中质量 $2m$，在下端的中点处与刚度为 K 的弹簧相联，当上端受

到水平干扰力作用后，刚杆将产生摆动，试求其对应于转角输出$\theta(t)$的脉冲响应函数。

2—10　一长为l，质量为m的均质杆可绕悬挂点A转动，在杆的中点受到两个刚度为K的弹簧约束。试求杆的下端受到一水平干扰力P的作用时，杆对于其摆角φ输出的脉冲响应函数。

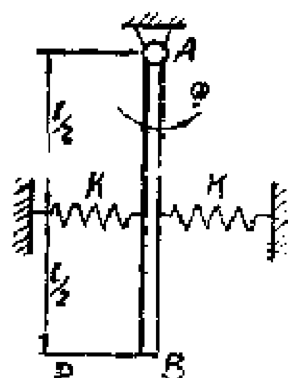


图　2·10

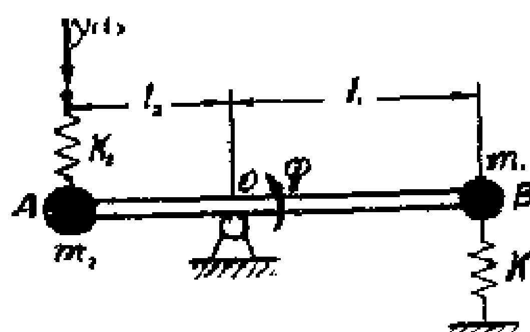
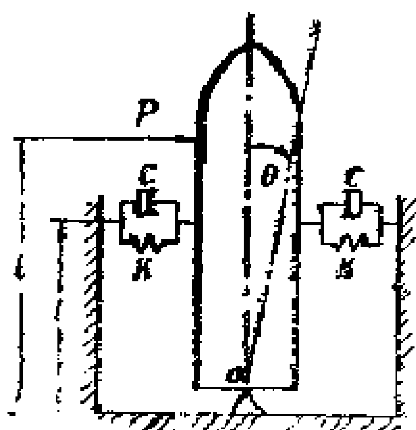


图　2·11

2—11　无质量刚性杠杆AB可绕支点0转动，在杆的两端分别固有两集中质量m_1和m_2，他们分别与刚度为K_1，K_2的两弹簧相联，如图2.11所示。若弹簧K_2的端点有一位移输入$y(t)$，试求对应于杆的转角φ输出的脉冲响应函数。



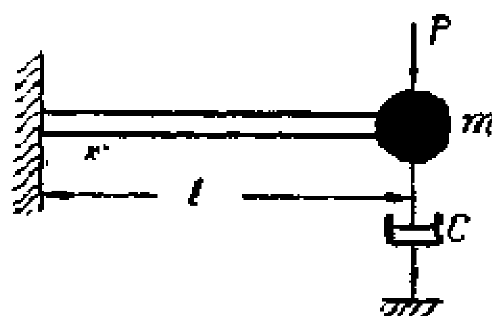


图　2·12　　　　图　2·13

2—12　图2.12所示的单自由度系统是一个可绕支点0

转动的刚体，其转动惯量为J_0，由两个刚度为K，阻尼系数为c的缓冲器将它支持在铅垂位置。设外界随机干扰力作用的中心到支点的距离为L，试求此系统对应于转角θ输出的脉冲响应函数。

2—13　在图2.13所示悬臂梁的自由端固结有集中质量m和阻尼系数为c的阻尼器。已知梁的长度l和抗弯刚度EJ。当系统在集中力P作用下发生振动时，试求对应于质量振动位移输出的脉冲响应函数。

2—14　图2.14所示的小车和载荷总重为G公斤，缓冲器的刚度为K，阻尼系数为c，若集中力P是输入，小车的振动位移是输出，试求此系统的脉冲响应函数。



图　2·14

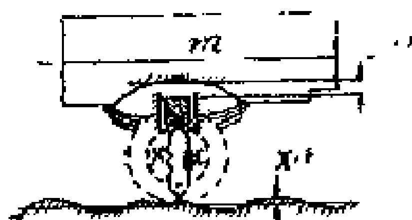


图　2·15

2—15　试求小车在不平的道路上行驶所产生振动的脉冲响应函数。已知小车的质量为m，悬挂弹簧的刚度为K，减振器的阻尼系数为c（图2.15）。

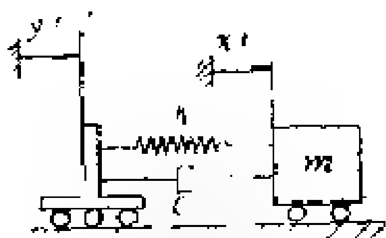


图　2·16

2—16　设图2.16所示系统的输入是基础的位移$y(t)$，输出是小车的绝对水平位移$x(t)$，已知m，k，c，时，试求系统的脉冲响应函数。

提示：当$t=0$时，$x(t)$和$\dot{x}(t)$都是不连续的，因而可在$t\approx 0$处令：

$$\dot{x}(t) = I_+(t)\{a\delta(t)+b\},$$

$$\ddot{x}(t)=I_+(t)\left\{a\frac{d}{dt}\delta(t)+b\,\delta(t)\right\}$$

其中a与b为常数，$I_+(t)$代表单位阶跃函数，再设$c^2<4mk$，便可确定$h(t)$的初始条件为：

$$h(0_+)=\frac{c}{m},\qquad \dot{h}(0_+)=\frac{k}{m}-\frac{c^2}{m^2}.$$

2—17　一质量为m的物体用弹簧k，阻尼器c与运动车辆相连，车身的水平运动用$y(t)$表示，质量m相对于车身的位移用$z(t)$表示（如图2.17）。现取车身的加速度$\ddot{y}(t)$作为输入，质量的相对位移$z(t)$作为输出。试求：

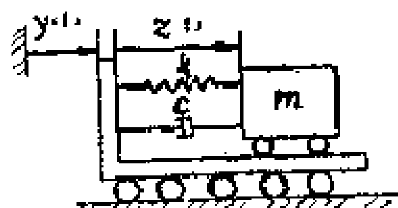


图　2.17

（1）　$t=0$时在单位加速度冲量作用下系统的脉冲响应函数（假定$c^2<4km$）。

（2）　系统对应于此输出，输入的频率响应函数。

（3）　验证频率响应函数与脉冲响应函数构成富氏变换对。

2—18　在图2.3所示的系统上当$t=0$时突然加一个持续时间T为的阶跃输入$x(t)=a$，当$t<0$和$t>T$时$x(t)=0$，试分别用下列三种方法确定系统对这一输入的响应$y(t)$。

（1）　用解运动微分方程式的经典方法，求输出响应。

（2）　用脉冲响应法求输出响应。

（3）　用频率响应法求输出响应。

提示：在用频率响应法时，最后的积分要用到留数定理

2—19 一个重量为W的无阻尼升降机，由一根横截面

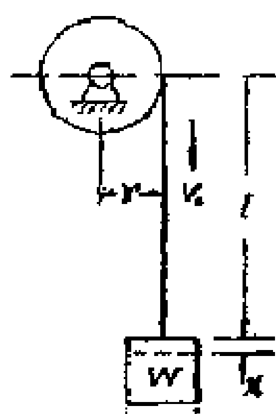


图 2·19

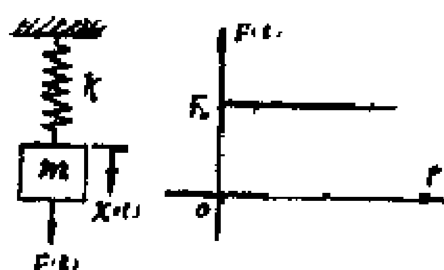


图 2·20

为A和弹性模量为E的柔性钢索悬挂，并以等速度V_0向下移动。在卷筒制动时引起的角加速度等于$-\frac{a}{r}$，其中r是卷筒的半径，a是切线加速度。设$t=0$时自由钢索的长度为l；若略去制动过程中长度的变化，试用脉冲响应法计算升降机的振动规律。

2—20 试计算无阻尼质量弹簧系统在突加阶跃函数激振力$F(t)=F_0$作用下的位移响应$x(t)$。

2—21 用脉冲响应法求无阻尼弹簧—质量系统在矩形脉冲作用下（图2.21）系统的位移输出响应。

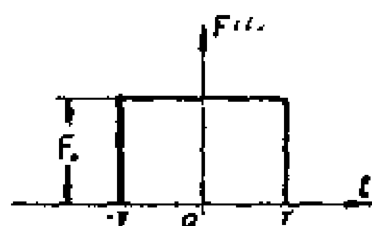


图 2·21

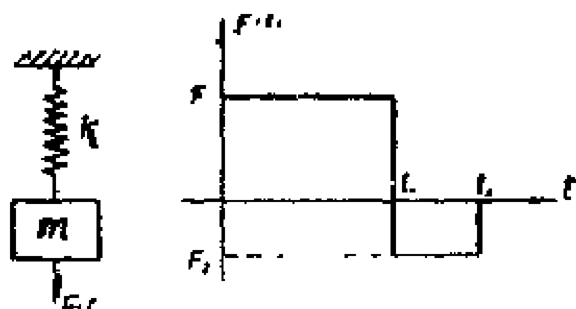
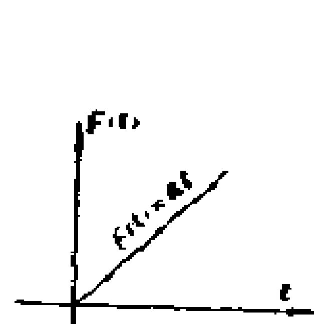
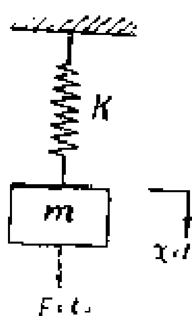


图 2·22

2—22 设作用在单自由度无阻尼质量弹簧系统上的干扰力$F(t)$是图2.22所示的两个阶跃函数，试用脉冲响应法

计算质量m的位移输出响应。





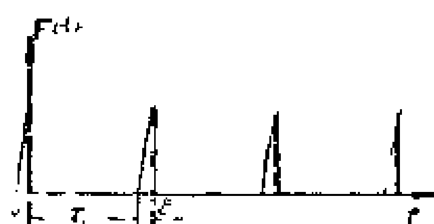


图 2·23

图 2·24

2—23 试求无阻尼质量弹簧系统对图2.23所示的斜坡上升力函数$F(t)=at$输入的质量位移输出响应。

2—24 无阻尼质量—弹簧系统在重复冲击作用下进行运动，设每次冲击的冲量为常数F，相邻两次冲击的时间间隔为τ_1（图2.24）。若除去冲力持续的时间ε不计，试求系统的稳态强迫振动。

2—25 分别计算无阻尼弹簧质量系统在下列各种激振力（图2.25a—d）作用下质量的位移输出响应。假设$t=0$时有$x_0=0$，$\dot{x}_0=0$。

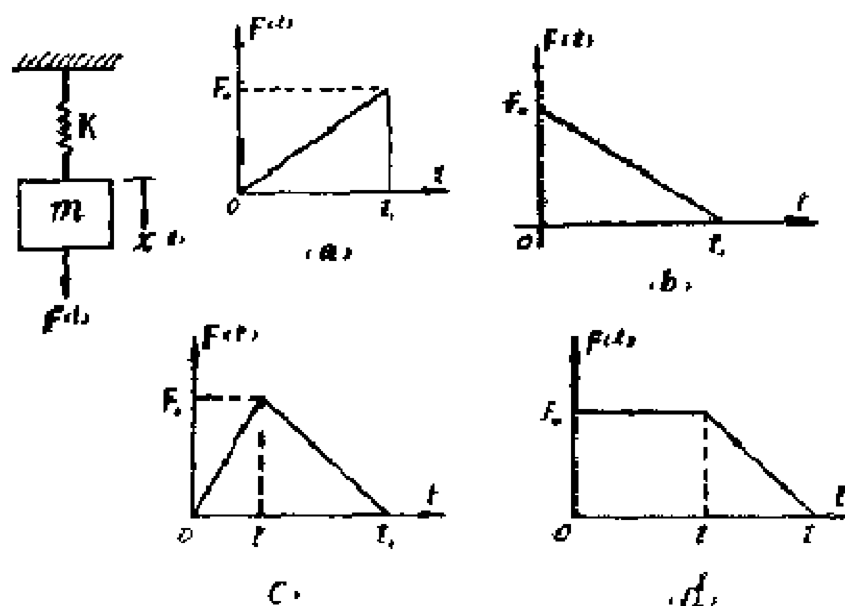


图 2·25

2—26　设作用在一个无阻尼的弹簧质量系统上的激振力的表达式为：

$$F(t) = \frac{F_0\omega}{2\pi n} t\cos\omega t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant t_1;$$

$$F(t) = F_0\cos\omega(t - t_1), \qquad t_1 \geqslant t,$$

其频率保持不变。从 $t = 0$ 开始，力幅随时间成正比地增大。在第 n 个周期末，即在 $t_1 = 2\pi n/\omega$ 时，力幅为 F_0，在此瞬时以后激振力的幅值保持不变。试求质量的位移输出响应 $x(t)$。

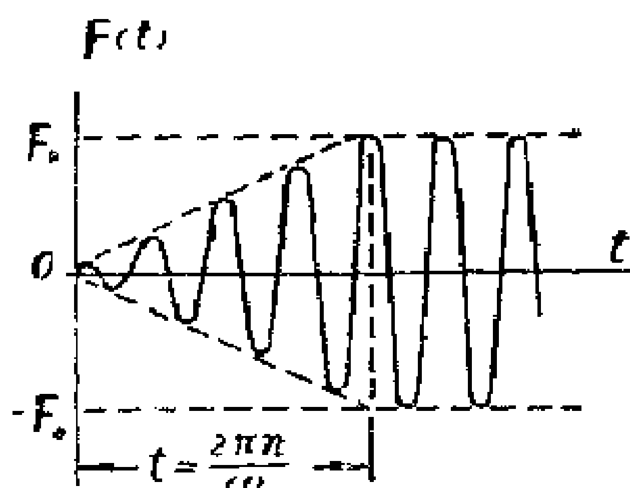


图　2·26

2—27　在图2.27所示系统中，设支座的位移输入 $y(t) = b$，为阶跃函数。求振动系统的响应。

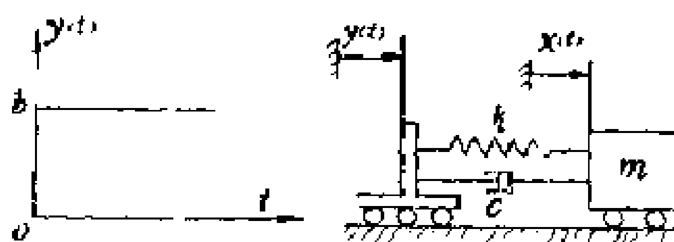


图　2·27

2—28　图2.28(a)所示系统的支座位移为图2.28(b)

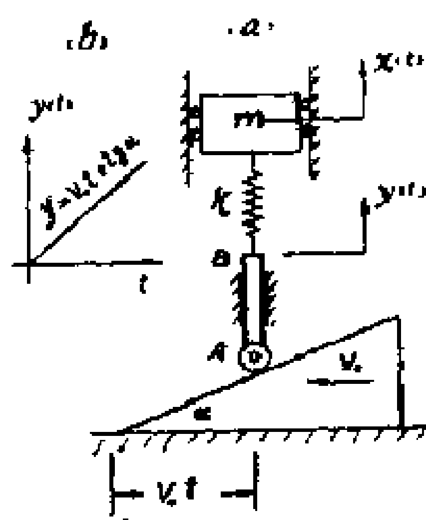


图　2.28

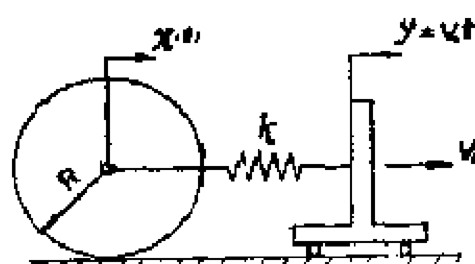


图　2.29

所示的斜坡上升函数$y(t)=vt$(即支座以匀速$v=V_0tg\alpha$作平动)。试求此阻尼系统的响应。

2—29　一个半径为R，质量为m的圆柱，可以在水平直线上作无滑动的滚动，在重心处用刚度为k的水平弹簧与小车相联，当小车以等速度V运动时试求圆柱中心的运动规律(图2.29)。

2—30　图2.30是一个挂在匣内的单摆，当匣子作水平简谐运动时($y=a_0\sin\omega t$)试求质量m相对于地面的运动规律。已知m，l，a_0，ω。

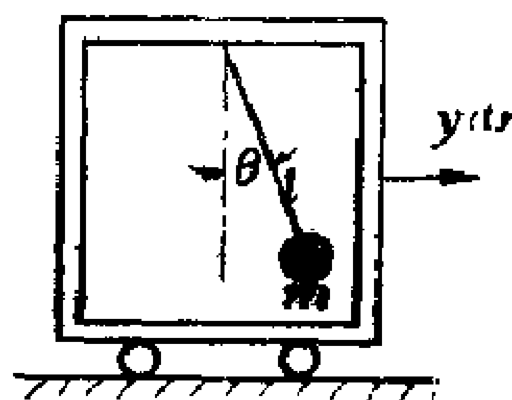


图　2.30

2—31　图2.31是一个测量直线振动$x(t)$的仪器简图。长度为l的摆锤OA可绕支点O摆动，在摆的自由端处固有质量为m的重物，在离支点$a=\frac{l}{4}$处用刚度为k的弹簧将摆支持在基座上。试用脉冲响应法求支座受速度脉冲$\dot{x}(t)=$

V_1e^{-t/t_0}作用后，摆相对于支座的运动规律$\theta(t)$。

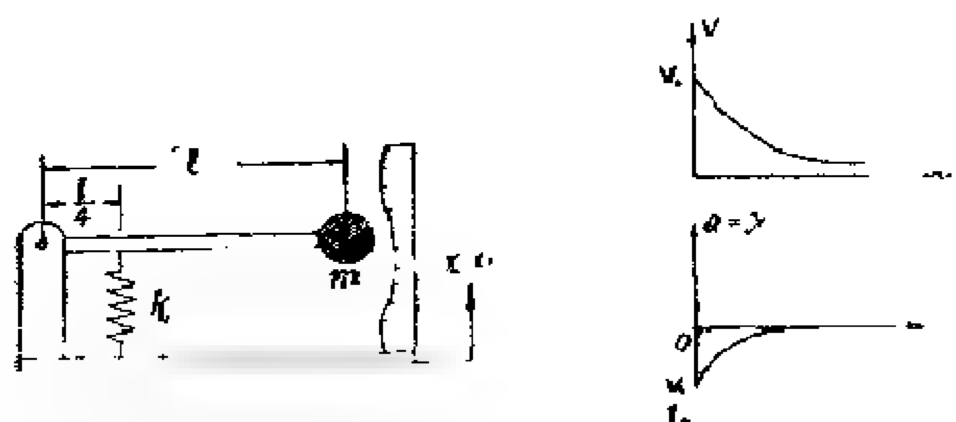


图 2-31

2—32 在无阻尼质量弹簧系统中，若支座按图2.32所

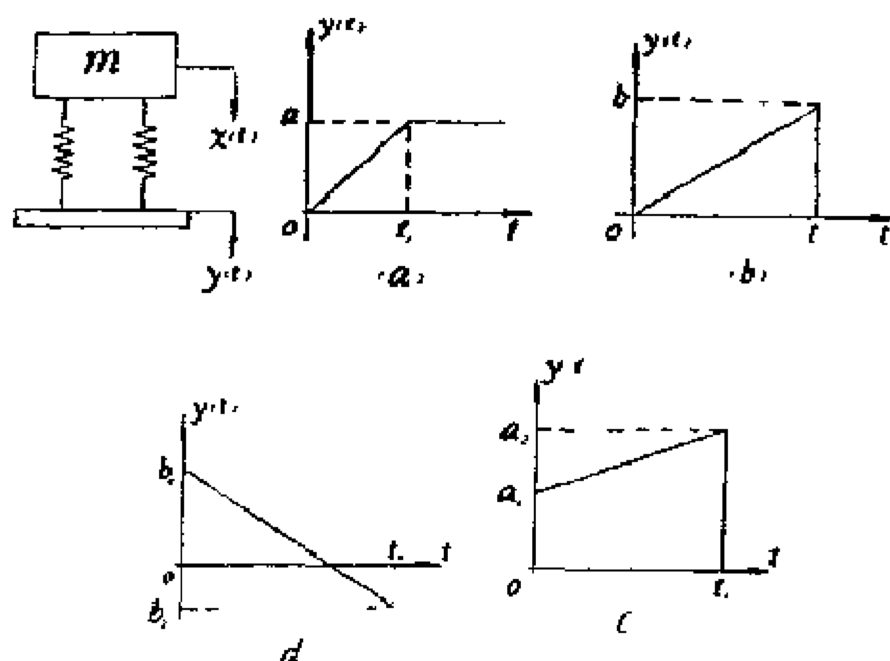


图 2-32

示的规律运动。试分别计算质量m的位移输出响应，假设$t=0$时有初始条件$x_0=0$，$\dot{x}_0=0$。

2—33 起重机以不变的速度V_0提升一个装有弹簧阻尼系统的匣子，已知质量m，弹簧的刚度k，阻尼器的阻尼系数c，在不计绳子刚度的条件下试求质量m的位移输出响

应。

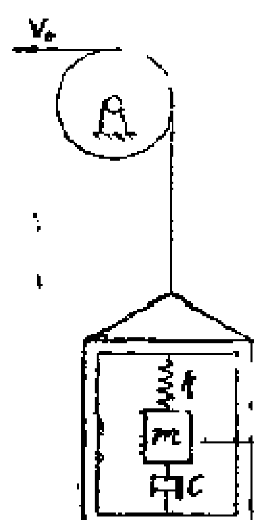


图 2·33

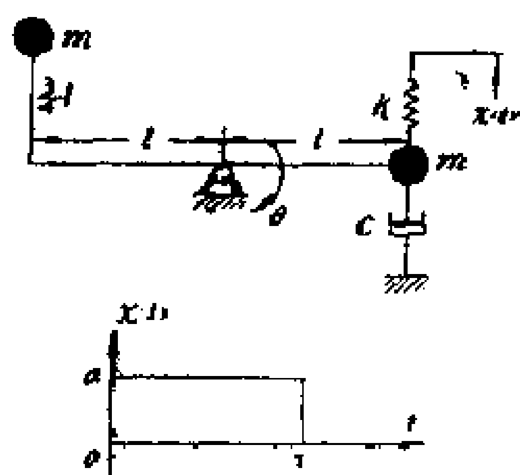


图 2·34

2—34 在图3.34所示系统中，设弹簧的端点产生矩形脉冲位移是系统的输入，已知m，k，c，l，a，T，试用脉冲响应法求系统的转角输出$\theta(t)$。

2—35 在图2.35所示的振动系统中已知m，k，c，当弹簧端点A在$0<t<t_1$的时间内向下作等速运动，设速度为V。试用脉冲响应法求质量m的运动规律。滑轮的质量可略去不计。

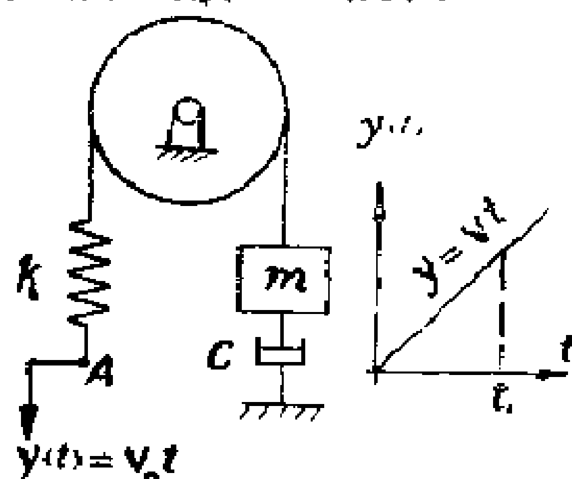


图 2·35

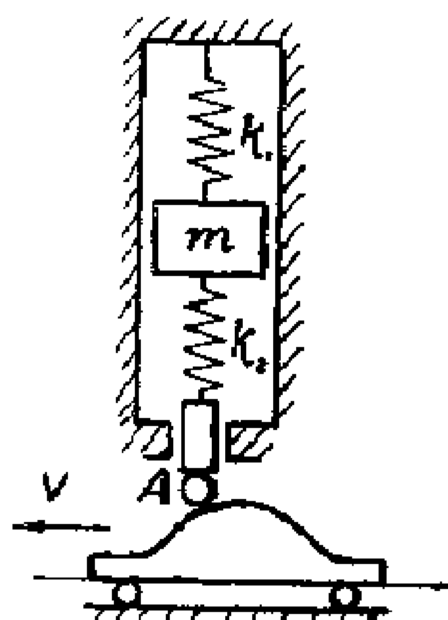


图 2·36

2—36 某传动阀门的凸轮机构可以简化为图2.36所示的振动系统，其中质量为m的物体用刚度为k_1的弹簧悬于固定面之下，另一端用刚度为k_2的弹簧使挺杆A与凸轮表面相接。当凸轮在水平方向表移时，挺杆沿铅垂方向的运动规律是：

$$y(t)=\begin{cases} a(1-\cos\omega t), & 0\leqslant t<\dfrac{2\pi}{\omega}; \\ 0, & t>\dfrac{2\pi}{\omega}. \end{cases}$$

试用脉冲响应法确定质量m的运动规律。

第 三 章

系统的动态特性分析(二)

传递函数及拉氏变换法

内 容 提 要

§3.1 拉氏变换及拉氏逆变换

本章首先介绍一些与计算传递函数和输出响应有关的拉氏变换及其性质。

(一)拉氏变换及拉氏逆变换的定义 设函数$f(t)$在$t \geq 0$时有定义，而且积分

$$F(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \tag{3.1}$$

在复数$s=\beta+j\omega$的某一域内收敛，则此积分所确定的函数$F(s)$称为函数$f(t)$的拉氏变换，记为

$$F(s)=L[f(t)],$$

而将$f(t)$称为$F(s)$的拉氏逆变换，其表示法以及与拉氏变换间的关系如下：

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=\frac{1}{2\pi j}\int_{\beta-j\omega}^{\beta+j\omega} F(s)e^{st}ds,$$

$$t>0. \tag{3.2}$$

(二)拉氏变换的性质

1. 线性性质 若α、β分别是常数、$L[f_1(t)]=F_1(s)$

和 $L[f_2(t)]=F_2(s)$，则有

$$L[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\alpha L[f_1(t)]+\beta L[f_2(t)], \qquad (3.3)$$

$$L^{-1}[\alpha F_1(s)+\beta F_2(s)]=\alpha L^{-1}[F_1(s)]+\beta L^{-1}[F_2(s)].$$

2. 微分性质　若 $L[f(t)]=F(s)$ 则有

$$L[f'(t)]=SF(s)-f(0), \qquad (3.4)$$

$$L[f''(t)]=S^2F(s)-Sf(0)-f'(0),$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$L[f^n(t)]=S^nF(s)-S^{n-1}f(0)-S^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{n-1}(0)$$

当初值 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$ 时，则有

$$L[f'(t)]=SF(s),$$

$$L[f''(t)]=S^2F(s),$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad (3.5)$$

$$L[f^n(t)]=S^nF(s).$$

3. 积分性质　若 $L[f(t)]=F(s)$，则有

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right]=\frac{1}{S}F(s). \qquad (3.6)$$

4. 位移性质　若 $L[f(t)]=F(s)$，则有

$$L[e^{at}f(t)]=F(s-a). \qquad (3.7)$$

5. 延迟性质　若 $L[f(t)]=F(s)$，且 t = 0 时，则对于任一实数 τ 有

$$L[f(t-\tau)]=e^{-s\tau}F(s),$$

$$L^{-1}[e^{-s\tau}F(s)]=f(t-\tau). \qquad (3.8)$$

6. 初值定理　若 $L[f(t)]=F(s)$，且 $\lim\limits_{s\to\infty}sF(s)$ 存在，则

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s),$$

或写为 $f(0) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$。 (3.9)

7. 终值定理　若 $L[f(t)]=F(s)$，且 $\lim_{t\to\infty} f(t)$ 存在，则

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s),$$

或写为 $f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)$。 (3.10)

8. 周期函数的拉氏变换　周期为 T 的周期函数 $f(t)$ 的拉氏变换 $F(s)$ 等于 $\dfrac{1}{1-e^{-Ts}}$ 乘第一周单个函数的拉氏变换 $F_1(s)$，

即 $$F(s)=L[f(t)]=\frac{1}{1-e^{-Ts}}F_1(s) \qquad (3.11)$$

9. 海维赛展开定理　若函数 $f(t)$ 的拉氏变换

$F(s)=L[f(t)]=\dfrac{A(s)}{B(s)}$ 是有理函数，其中 $A(s)$ 和 $B(s)$ 是不可约的多项式，且 $A(s)$ 的次数小于 $B(s)$ 的次数 n，当 $B(s)$ 有几个单零点 s_1，s_2，…，s_n 时，则有

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{A(s_k)}{B'(s_k)}e^{s_k t}. \qquad (3.12)$$

若 s_1 是 $B(s)$ 的一个 m 阶零点，而 S_{m+1}，S_{m+2}，S_{m+3}，…，S_n 是 $B(s)$ 的单零点时，则有

$$f(t)=\sum_{k=m+1}^{n}\frac{A(s_k)}{B'(s_k)}e^{s_k t}+\frac{1}{(m-1)!}\lim_{s\to s_1}\frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}}\left[(s-s_1)^m\frac{A(s)}{B(s)}e^{st}\right]. \qquad (3.13)$$

(三)拉氏变换的计算

在实际工作中，用查表求函数的拉氏变换比按定义用广义积分法求拉氏变换要方便得多，特别是掌握了拉氏变换的性质后，再使用查表的方法，就能更快地找到所求函数的拉氏变换，表 3.1 是本章例题和习题中所要用到的一些拉氏变换。

例题和作业中应用到的拉氏变换归纳如下：

表3.1 拉氏变换简表

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
$\cos^2 t$	[illegible]	[illegible]	$\frac{s}{(s+a)^2}$
[illegible]	$\frac{2abs}{(s^2+(a+b)^2)(s^2+(a-b)^2)}$	[illegible]	$\frac{s}{(s+a)^3}$
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

例3.1 求图19所示单个半周期正弦波的拉氏变换

已知：$f(t)=\begin{cases} F_0\sin\dfrac{2\pi}{T}t, & 0\leqslant t<\dfrac{\pi}{2}; \\ 0, & t\geq 0 \end{cases}$

求：$F(s)$。

解：根据图19(b)可将单个半周期正弦波表示为

$$f(t)=f_a(t)+f_b(t)$$

$$=F_0\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)U(t)$$

$$+F_0\sin\left(\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{T}{2}\right)\right)$$

$$\times U\left(t-\frac{T}{2}\right)$$

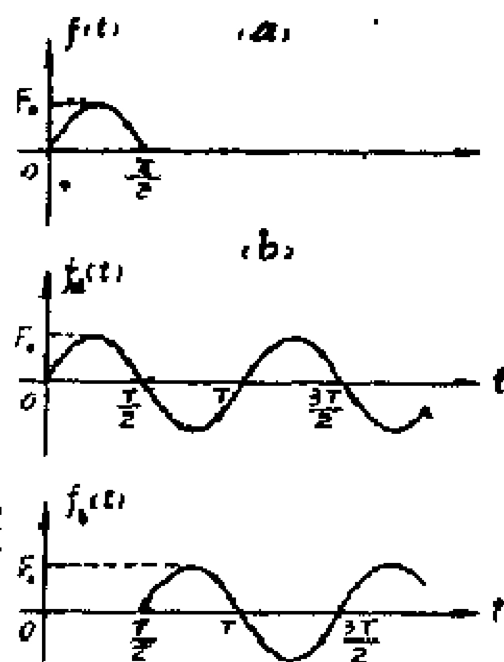


图 19

根据表3.1中正弦函数的拉氏变换，借助于延迟性质(3.8)可以求出，

$$F(s)=L[f(t)]=L[f_a(t)]$$

$$+L[f_b(t)]$$

$$=\frac{F_0(2\pi/T)}{s^2+(2\pi/T)^2}+\frac{F_0(2\pi/T)}{s^2+(2\pi/T)^2}e^{-\frac{Ts}{2}}$$

$$=\frac{F_0(2\pi/T)}{s^2+(2\pi/T)^2}\left(1+e^{-\frac{Ts}{2}}\right),$$

例3.2 求图20中所示半正弦周期函数的拉氏变换。

已知：F_0，T，$f(t+T)=f(t)$，

$$f(t)=\begin{cases} F_0\sin\dfrac{2\pi}{T}t, & 0<t<\dfrac{T}{2} \\ 0, & \dfrac{T}{2}<t<T \end{cases}$$

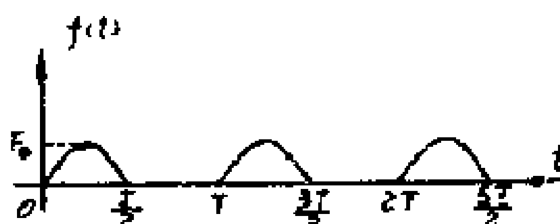


图 20

求：$L[f(t)]$。

解： 根据上例中求得的单个半正弦波的拉氏变换，再应用公式(3.11)得

$$F(s)=L[f(t)]=\frac{1}{1-e^{-Ts}}F_1(s)$$

$$=\frac{1+e^{-Ts/2}}{1-e^{-Ts}}\cdot\frac{F_0(2\pi/T)}{s^2+(2\pi/T)^2}$$

$$=\frac{1}{1-e^{-Ts/2}}\cdot\frac{F_0(2\pi/T)}{s^2+(2\pi/T)^2}.$$

(四)拉氏逆变换的计算

拉氏逆变换除用公式(3.12)，(3.13)所示的海维赛展开定理来计算外，还可以用部份分式和查表法来求解。

例3.3 求函数 $F(s)=\dfrac{s+4}{2s^2+5s+3}$ 的拉氏逆变换。

已知： $F(s)=\dfrac{s+4}{2s^2+5s+3}$

求：$f(t)=L^{-1}[F(s)]$。

解： 这里 $B(s)=2s^2+5s+3=2(s+1)\left(s+\dfrac{3}{2}\right)$，有两个单零点 $s_1=-1$ 和 $s_2=-\dfrac{3}{2}$，由公式(3.12)得

$$f(t)=L^{-1}\left[\frac{s+4}{2s^2+5s+3}\right]$$

$$=\sum_{K=1}^{n}\frac{A(s_K)}{B'(s_K)}e^{s_K t}$$

$$=\sum_{K=1}^{n}\frac{s_K+4}{4s_K+5}e^{s_K t}$$

$$=\frac{s+4}{4s+5}e^{st}\Big|_{s=-1}+\frac{s+4}{4s+5}e^{st}\Big|_{s=-\frac{3}{2}}$$

$$=3e^{-t}-\frac{5}{2}e^{-\frac{3t}{2}}. \qquad (1)$$

下面再用部份分式和查表法来求此题的拉氏逆变换：

$$f(t)=L^{-1}\left[\frac{s+4}{2s^2+5s+3}\right]$$

$$=L^{-1}\left[\frac{3}{s+1}-\frac{5/2}{s+\frac{3}{2}}\right]$$

$$=3e^{-t}-\frac{5}{2}e^{-\frac{3}{2}t}. \qquad (2)$$

可见与(1)式求得的结果相同。

例3.4 求函数$F(s)=\dfrac{1}{s(s-1)^2}$的拉氏逆变换。

解： 这里 $B=(s-1)^2$，有一个单零点 $s=0$，和 $s=1$ 的二阶零点，由(3.13)式得

$$f(t)=\frac{A(s_1)}{B'(s_1)}e^{s_1 t}$$

$$+\frac{1}{(2-1)!}\lim_{s\to1}\frac{d}{ds}\left[(s-1)^2\frac{A(s)}{B(s)}e^{st}\right]$$

$$=\frac{1}{3s^2-4s+1}e^{st}\Big|_{s=0}$$

$$+\lim_{s\to1}\frac{d}{ds}\left[(s-1)^2\frac{1}{s(s-1)^2}e^{st}\right]$$

$$=1+\lim_{s\to1}\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s}e^{st}\right]$$

$$=1+\lim_{s\to1}\left(\frac{t}{s}e^{st}-\frac{1}{s^2}e^{st}\right)$$

$$=1+(te^t-e^t)$$

$$=1+e^t(t-1), \qquad t>0$$

若将$F(s)$分解成部份分式

$$F(s)=\frac{1}{s}+\frac{1}{(s-1)^2}-\frac{1}{s-1},$$

再取拉氏变换得

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]$$

$$=L^{-1}\left[\frac{1}{s}+\frac{1}{(s-1)^2}-\frac{1}{s-1}\right]$$

$$=1+te^t-e^t.$$

与用海维赛定理求得的结果相同。

§3.2 传递函数及其计算

（一）传递函数

传递函数是描述线性定常系统的输入——输出关系的一种函数，因此它也能表示系统的动态特性。其定义为：初始条件为零时，输出量（响应函数）的拉氏变换与输入量（激

振函数）的拉氏变换之比称为传递函数。

在一般情况下，线性系统激励$x(t)$与响应$y(t)$所满足的关系，可用下列微分方程来表示

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \cdots + a_1 y$$
$$= b_m x^{(m)} + b_{m-1} x^{(m-1)} + b_{m-2} x^{(m-2)} + \cdots + b_1 x \tag{3.14}$$

其中，a_1，…，a_n，b_1，…b_m均为常数，n，m为正整数，且$n > m$，于是可把线性系统的传递函数表示为

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1}.$$

对于初始条件全为零的情况按定义有

$$Y(s) = G(s)X(s), \tag{3.15}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)},$$

式中

$$Y(s) = L[y(t)] = \int_0^{+\infty} y(t) e^{-st} dt \tag{3.16}$$

是输出的拉氏变换；

$$X(s) = L[x(t)] = \int_0^{+\infty} x(t) e^{-st} dt \tag{3.17}$$

是输入的拉氏变换。

(二)传递函数的计算

由于输出预先不知道，因此不能分别计算出输入、输出的拉氏变换，再用定义公式(3.15)计算传递函数，一般都是采用建立运动微分方程式的方法，通过求输出、输入拉氏变换的比值来确定传递函数，其步骤如下：

（1）分析力和运动，明确输出与输入参数。

（2）列出系统的运动微分方程式。

（3）假设全部初始条件等于零，对微分方程取拉氏变换。

（4）求输出量与输入量的比值，确定传递函数。

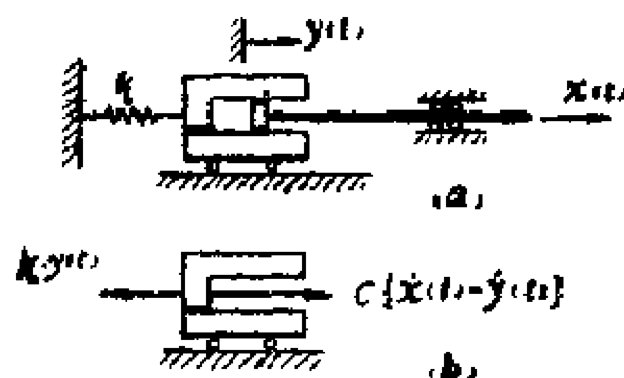


图 21

例3.5 在图21所示的振动系统中，质量为m的汽缸与刚度为k的弹簧相联，汽缸与活塞间相互运动时介质的阻尼系数为c，若将活塞杆的水平运动$x(t)$视为输入，被激发汽缸的振动位移$y(t)$作为输出，试求系统的传递函数。

已知：k，m，c。

求：$G(s)$。

解：根据图21(b)所示的受力图可列出汽缸的运动微分方程

$$m\ddot{y}=c[\dot{x}(t)-\dot{y}(t)]-ky,$$

或
$$m\ddot{y}+c\dot{y}+ky=c\dot{x},$$

注意到初始条件$t=0$时，$y(0)=0$，$\dot{y}(0)=0$，对(a)式两端作拉氏变换，利用公式(2.5)可得

$$(ms^2+cs+k)L[y(t)]=csL[x(t)]。$$

由此便可解出所求的传递函数

$$G(s)=\frac{L[y(t)]}{L[x(t)]}=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{cs}{ms^2+cs+k}$$

例3.6 质量为m的物体用刚度为k_1的弹簧和阻尼系数为c的阻尼器悬挂于无质量的壳体内。此壳体又用刚度为k_2的弹簧悬挂在固定面的下方（如图22(a)所示）。若将作用在壳体上的激振力$F(t)$视为输入，质量m的绝对位移$x(t)$作为输出，试求此系统的传递函数。

已知：m、k_1、k_2、c。

求：$G(s)$。

解：设壳体沿铅垂方向的绝位移为y，由受力图22(b)可分别列出质量m和壳体的运动微分方程

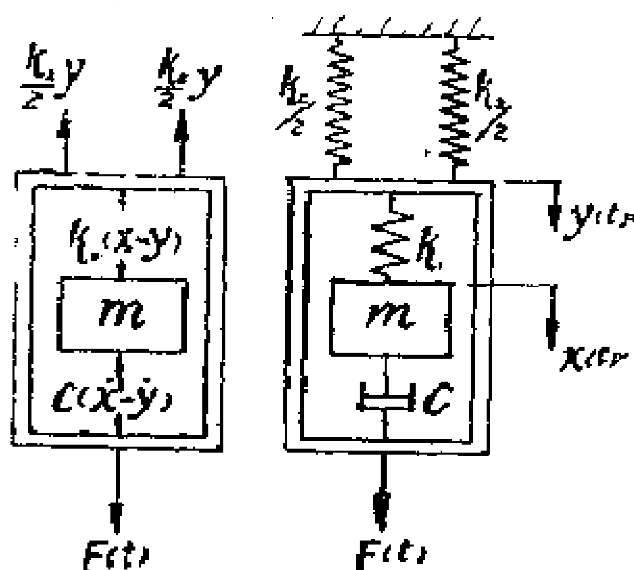


图 22

$$m\ddot{x}=-k_1(x-y)-c(\dot{x}-\dot{y}),\qquad(1)$$

$$0=F(t)+k_1(x-y)+c(\dot{x}-\dot{y})-k_2y\qquad(2)$$

由(1)+(2)得

$$m\ddot{x}=F(t)-k_2y,$$

由此解出

$$y=\frac{F(t)}{k_2}-\frac{m}{k_2}\ddot{x}\qquad(3)$$

将(3)式代入(1)式得

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+k_1x=c\left(\frac{\dot{F}(t)}{k_2}-\frac{m}{k_2}\dddot{x}\right)$$

$$+k_1\left(\frac{F(t)}{k_2}-\frac{m}{k_2}\ddot{x}\right),$$

简化为 $$cm\dddot{x}+(k_1+k_2)m\ddot{x}+ck_2\dot{x}+k_1k_2x$$

$$=c\dot{F}(t)+k_1F(t). \tag{4}$$

在零初始条件下，对方程(4)两端取拉氏变换得

$$[cms^3+(k_1+k_2)ms^2+ck_2s+k_1k_2]X(s)$$

$$=(cs+k_1)F(s),$$

因此系统的传递函数为

$$G(s)=\frac{X(s)}{F(s)}$$

$$=\frac{cs+k_1}{cms^3+(k_1+k_2)ms^2+ck_2s+k_1k_2}.$$

§3.3 拉氏变换法

应用传递函数$G(s)$或拉氏变换求解振动响应的方法称为拉氏变换法。对于以下两种情况用拉氏变换法解题时，有少许差别。

(　)零初始条件的问题

这种问题可直接通过传递函数$G(s)$，按公式(3.15)求得输出的拉氏变换$Y(s)$后，再求拉氏逆变换

$$y(t)=L^{-1}[Y(s)]$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty}Y(s)e^{st}ds,\quad t>0,\quad s=\beta+j\omega. \tag{3.18}$$

这就是所求的输出响应。

用传递函数解这种问题的步骤是：

(1) 分析运动和力，明确输出、输入参数。

(2) 计算系统的传递函数。

(3) 用(3.17)式计算输入的拉氏变换。

(4) 用(3.15)式计算输出的拉氏变换。

(5) 用公式(3.18)或查表求输出拉氏变换的逆变换，确定输出响应。

例3.7 在例题3.5中设活塞杆的位移输入 $x(t)=a\sin\omega t$，且在初瞬时系统处于静止状态。试用传递函数法确定汽缸的振动位移响应 $y(t)$。

已知：m，k，c，$x(t)=a\sin\omega t$。

求：$y(t)$。

解： 在例3.5中已求得系统的传递函数

$$G(s)=\frac{cs}{ms^2+cs+k}, \qquad (a)$$

用公式(3.17)计算系统输入的拉氏变换

$$X(s)=L[x(t)]$$

$$=\int_0^\infty x(t)e^{-st}dt$$

$$=\int_0^\infty a\sin\omega t e^{-st}dt$$

$$=\frac{a\omega}{s^2+\omega^2}. \qquad (b)$$

将(a)，(b)两式代入公式(3.15)计算输出的拉氏变换

$$Y(s)=G(s)X(s)=\frac{cs}{ms^2+cs+k}\cdot\frac{a\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$=a\omega\left(\frac{2ns}{s^2+2ns+\omega_0^2}\cdot\frac{1}{s^2+\omega^2}\right), \qquad (c)$$

其中

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m}{k}}, \qquad n = \frac{c}{2m}.$$

为了便于求拉氏逆变换，将(c)式化为部分分式

$$Y(s) = a\omega\left(\frac{As+B}{s^2+2ns+\omega_0^2} + \frac{Cs+D}{s^2+\omega^2}\right)$$

$$= a\omega\frac{\left[\begin{array}{l}(A+C)s^3+(B+2nC+D)s^2+\\(A\omega^2+C\omega_0^2+2nD)s+B\omega^2+D\omega_0^2\end{array}\right]}{(s^2+2ns+\omega_0^2)(s^2+\omega^2)}, \qquad (d)$$

比较(c)，(d)两式各阶前面的系数得

$$A + C = 0, \qquad A\omega^2 + C\omega_0^2 + 2nD = 2n,$$
$$B + 2nC + D = 0, \qquad B\omega^2 + D\omega_0^2 = 0.$$

由此解出

$$A = \frac{2n(\omega^2 - \omega_0^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2},$$

$$B = \frac{4n^2\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}, \qquad (e)$$

$$C = \frac{2n(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2},$$

$$D = \frac{4n^2\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}.$$

对(d)式进行拉氏逆变换得

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)]$$

$$= L^{-1}\left[a\omega\left(\frac{As+B}{s^2+2ns+\omega_0^2} + \frac{Cs+D}{s^2+\omega^2}\right)\right]$$

$$= L^{-1}\left[a\omega\left(\frac{A(s+n)+(B-An)}{(s+n)^2+(\omega_0^2-n^2)}\right.\right.$$

$$+\frac{Cs+D}{s^2+\omega^2}\Big)\Big]$$

$$=a\omega\Big\{Ae^{-nt}\cos\sqrt{\omega_0^2-n^2}\,t$$

$$+\frac{B-An}{\sqrt{\omega_0^2-n^2}}e^{-nt}\sin\sqrt{\omega_0^2-n^2}\,t$$

$$+C\cos\omega t+\frac{D}{\omega}\sin\omega t\Big\}. \qquad (f)$$

将(e)式中，A，B，C，D的关系代入(f)式，并应用三角关系$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$后可得

$$y(t)=a\omega\Big\{\Big[\frac{2n\omega_0}{\sqrt{[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4n^2\omega^2](\omega_0^2-n^2)}}$$

$$\sin(\sqrt{\omega_0^2+n^2}\,t+\alpha)\Big]e^{-nt}$$

$$+\frac{2n}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4n^2\omega^2}}\sin(\omega t+\beta)\Big\},$$

其中

$$\alpha=\mathrm{tg}^{-1}\frac{\omega_0^2-\omega^2}{2n(\omega_0^2+\omega^2)}\sqrt{\omega_0^2-n^2};$$

$$\beta=\mathrm{tg}^{-1}\frac{\omega_0^2-\omega^2}{2n\omega}.$$

（二）考虑初始条件的问题

在这种情况下，不能用公式(3.15)来计算输出的拉氏变换，常采用对微分方程两端作拉氏变换的方法直接求输出的拉氏变换，当然零初始条件的问题也可按此方法求解。

应用拉氏变换直接求解的步骤如下：

(1) 分析力和运动，建立系统的运动微分方程式。

(2) 对微分方程两端作拉氏变换。

(3) 解方程，求输出的拉氏变换。

(4) 求输出拉氏变换的逆变换，确定输出响应。

例3.8 支持在弹簧上的钢杆 AB 被限制在导管内作铅垂直线运动(图23)，已知各弹簧刚度，系统的阻尼和 AB 杆的质量，以及 $t=0$ 时的位移 y_0，速度 v_0，试用拉氏变换法求在任意干扰 $F(t)$ 激振下 AB 杆的振动规律。不考虑 CD 杆的质量，认为它也作铅垂平动。

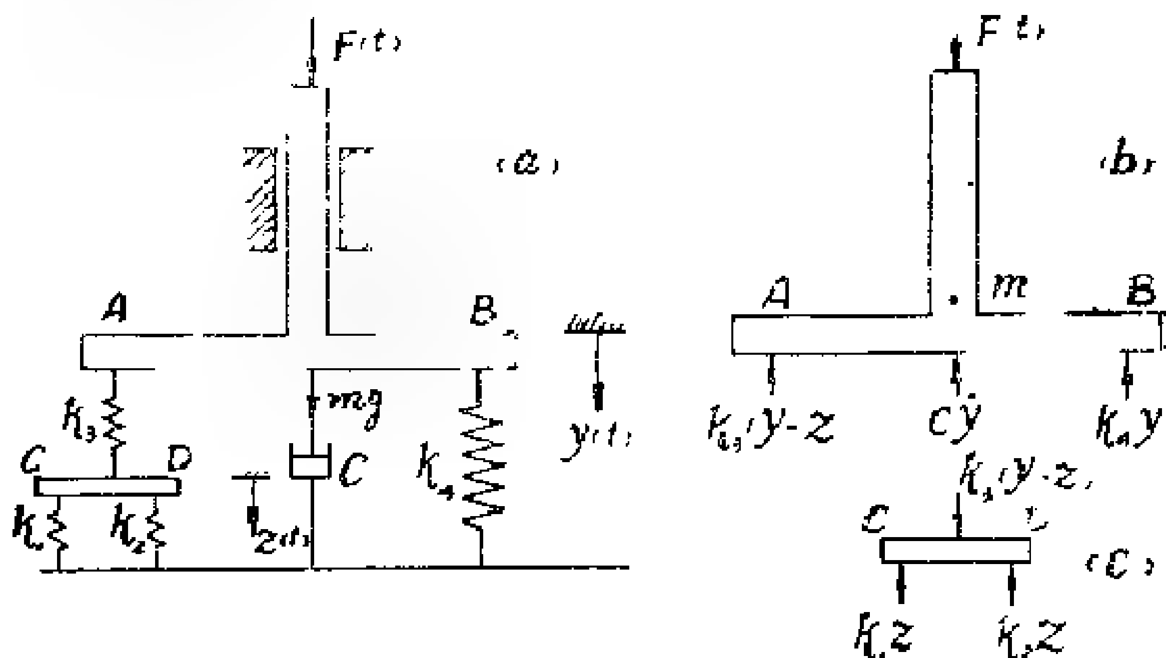


图 23

已知：m，c，k_1，k_2，k_3，k_4，$F(t)$ 以及初始条件为 $t=0$ 时，$y(0)=y_0$，$\dot{y}(0)=v_0$。

求：$y(t)$。

解：从图 23(c) 所示的受力图可列出 CD 杆的平衡方程

$$k_3(y-z)-k_1z-k_2z=0,$$

由此解得 CD 杆的位移 $$z=\frac{k_3}{k_1+k_2+k_3}y.$$

再根据图23(b)所示的受力情况列出导杆AB的运动微分方程式

$$m\ddot{y} = F(t) - c\dot{y} - k_1 y - k_3\left(y - \frac{k_3}{k_1+k_2+k_3}y\right),$$

或
$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{F(t)}{m}, \tag{a}$$

其中
$$\omega_0^2 = \frac{1}{m}\left[k_1 + \frac{(k_1+k_2)k_3}{k_1+k_2+k_3}\right]; \tag{b}$$

$$n = \frac{C}{2m} \tag{c}$$

注意到起始条件 $t=0$，$y(0)=y_0$，$\dot{y}(0)=v_0$，
用式(3.4)对方程(a)两端作拉氏变换，并利用式(3.4)的性质得

$$(s^2+2ns+\omega_0^2)Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) - 2ny(0)$$
$$= \frac{1}{m}L[F(t)] = \frac{1}{m}\bar{F}(s).$$

由此可求得输出的拉氏变换

$$Y(s) = \frac{\bar{F}(s)}{m(s^2+2ns+\omega_0^2)} + \frac{(s+2n)y_0}{s^2+2ns+\omega_0^2}$$
$$+ \frac{v_0}{s^2+2ns+\omega_0^2}. \tag{d}$$

输出的振动响应$y(t)$是$Y(s)$的拉氏逆变换，应等于(d)式右端三项拉氏逆变换的和

即
$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t). \tag{e}$$

应用卷积定理来求第一项的逆变换

$$y_1(t) = L^{-1}\left[\frac{\bar{F}(s)}{m(s^2+2ns+\omega_0^2)}\right]$$

$$L^{-1}\left[F(s)\cdot\frac{1}{m(s^2+2ns+\omega_0^2)}\right]$$

$$=f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_0^t F(\tau)\frac{1}{m\omega_d}e^{-n(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)d\tau$$

$$=\frac{1}{m\omega_d}\int_0^t F(\tau)e^{-n(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)d\tau.$$

$$(f)$$

式中 $\omega_d=\sqrt{\omega_0^2-n^2}$ 是有阻尼系统的固有频率；

$f_1(t)=L^{-1}[F(s)]=F(t)$ 是干扰力拉氏变换的逆变换，就是干扰力本身；

$$f_2(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{m(s^2+2ns+\omega_0^2)}\right]$$

$$=\frac{1}{m\omega_d}e^{-nt}\sin\omega_d t.$$

第二项是(d)式右端第二项的拉氏逆变换

$$y_2(t)=L^{-1}\left[\frac{s+2n}{s^2+2ns+\omega_0^2}y_0\right]$$

$$=y_0\frac{\omega_0}{\omega_d}e^{-nt}\cos(\omega_d t-\psi), \qquad (g)$$

式中 $\psi=\mathrm{tg}^{-1}\frac{n}{\omega_d}$.

第三项是(d)式右端第三项的拉氏逆变换

$$y_3(t)=L^{-1}\left[\frac{v_0}{s^2+2ns+\omega_0^2}\right]$$

$$+\frac{v_0}{\omega_d}e^{-nt}\sin\omega_d t. \qquad (h)$$

将(f)、(g)、(h)代入(e)便得到所求的振动响应

$$y(t)=\frac{1}{m\omega_d}\int_0^t F(\tau)e^{-n(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)d\tau$$

$$+\frac{\omega_0}{\omega_d}y_0e^{-nt}\cos(\omega_d t-\psi)$$

$$+\frac{v_0}{\omega_d}e^{-nt}\sin\omega_d t.$$

例3.9 用拉氏变换法求例2.6中传到仪表上的最大力。设x是仪表m相对于木箱的位移，y是木箱的绝对位移，

已知：m、k、h。

求：$T_{max}=kx_{max}$。

解：在例2.6中列出仪表的运动方程为

$$m(\ddot{x}+\ddot{y})=-kx, \qquad (1)$$

令$p^2=k/m$，可将此方程简化为

$$\ddot{x}+p^2x=-\ddot{y}. \qquad (2)$$

取开始降落的瞬时$t=0$，此时的初速度和初位移分别为$x(0)$，$y(0)$，$\dot{x}(0)$，$\dot{y}(0)$，对方程两边取拉氏变换得

$$s^2X(s)-sx(0)-\dot{x}(0)+p^2X(s)$$
$$=-s^2Y(s)+sy(0)-\dot{y}(0),$$

由此解得

$$X(s)=[x(0)+y(0)]\frac{s}{s^2+p^2}+[\dot{x}(0)$$

$$+\dot{y}(0)]\frac{1}{s^2+p^2}-\frac{s^2Y(s)}{s^2+p^2} \qquad (3)$$

设开始降落时的速度为零，并选此瞬时的位置为座标原点，则起始条件为

$$t=0\text{ 时，}x(0)=y(0)=\dot{x}(0)=\dot{y}(0)=0。\qquad (4)$$

木箱下落的规律是

$$y(t)=\frac{1}{2}gt^2,$$

则
$$Y(s)=\int_0^\infty y(t)e^{-st}dt=\int_0^\infty \frac{1}{2}gt^2e^{-st}dt=\frac{g}{s^3}。\qquad (5)$$

将(4)、(5)两式代入(3)，再作拉氏逆变换得

$$x(t)=L^{-1}[X(s)]=-L^{-1}\left[\frac{g}{s(s^2+p^2)}\right]=-\frac{g}{p^2}(1-\cos pt)。\qquad (6)$$

木箱下降后着地，所用时间为 $t_0=\sqrt{\frac{2h}{g}}$。在着地瞬时仪表的相对位移和相对速度为

$$x(t_0)=-\frac{g}{p^2}(1-\cos pt_0),$$

$$\dot{x}(t_0)=-\frac{g}{p}\sin pt_0。$$

实际上就是着地后第二个阶段运动的起始条件，若重新选木箱着地瞬时为起始时间和座标原点，则着地后第二阶段运动的起始条件是

$t=0$时 $y(0)=0$，$x(0)=-\dfrac{g}{p^2}(1-\cos pt_0)$，

$\dot{y}(0)=gt_0$，$\dot{x}(0)=-\dfrac{g}{p}\sin pt_0$

式中 $\qquad t_0=\sqrt{2h/g} \qquad\qquad (7)$

将(5)，(7)两式代入(3)式得仪表相对位移输出的拉氏变

$$X(s)=-\frac{g}{p^2}(1-\cos pt_0)\frac{s}{s^2+p^2}+\left(gt_0-\frac{g}{p}\sin pt_0\right)\frac{1}{s^2+p^2}-\frac{g}{s(s^2+p^2)},$$

对此式再作拉氏逆变换得

$$x(t)=L^{-1}[X(s)]$$

$$=-\frac{g}{p^2}(1-\cos pt_0)\cos pt+\left(\frac{gt_0}{p}-\frac{g}{p^2}\sin pt_0\right)\sin pt$$

$$=\frac{g}{p^2}\sqrt{(1-\cos pt_0)^2+(pt_0-\sin pt_0)^2}\cdot\sin(pt-\phi),$$

其中

$$\phi=\mathrm{tg}^{-1}\frac{1-\cos pt_0}{pt_0-\sin pt_0}.$$

当$pt-\phi=\pi/2$时，仪表有最大的相对位移

$$x_{max}=k\frac{g}{p^2}\sqrt{(1-\cos pt_0)^2+(pt_0-\sin pt_0)^2}.$$

例3.10 试求有阻尼质量弹簧系统在任意激振力和零初

始条件下的位移输出响应计算公式(图24)。

已知：m，k，$F(t)$ 及初始条件 $t=0$ 时，

$x(0)=x_0$，$\dot{x}(0)=V_0$。

求：$x(t)$。

解：有阻尼质量弹簧系统在任意激振力 $F(t)$ 作用下的运动微分方程为

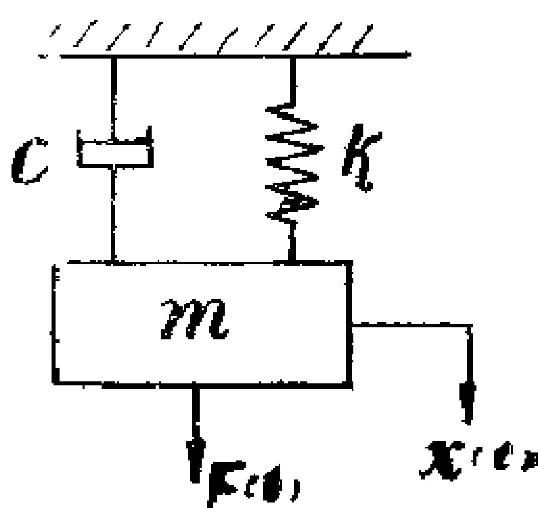


图 24

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F(t) \tag{1}$$

对此式两端取拉氏变换得

$$(ms^2+cs+k)X(s)-m\dot{x}(0)-msx(0)-cx(0)=\bar{F}(s)。\tag{2}$$

由此解得输出的拉氏变换为

$$X(s)=\frac{\bar{F}(s)}{m(s^2+2\xi ps+p^2)}+\frac{s+2\xi p}{s^2+2\xi ps+p^2}x_0+\frac{V_0}{s^2+2\xi ps+p^2}，\tag{3}$$

其中 $p=\frac{k}{m}$，$\xi=\frac{c}{2\sqrt{mk}}$，$p'=p\sqrt{1-\xi^2}$。

由此可见，输出应等于右端三项拉氏逆变换之和。

首先我们用 Borel's 定理来计算第一项的拉氏逆变换。令

$$\bar{f}_1(s)=\bar{F}(s),\qquad \bar{f}_2(s)=\frac{1}{m(s^2+2\xi ps+p^2)},$$

很明显 $f_1(t)=F(t)$，而 $\bar{f}_2(s)$ 的拉氏逆变换为

$$f_2(t)=\frac{1}{mp'}e^{-\xi pt}\sin p't. \qquad (4)$$

利用 borel's 定理可求出(3)式右端第一项的拉氏逆变换

$$L^{-1}[\bar{f}_1(s)\bar{f}_2(s)]=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

$$=\frac{1}{mp'}\int_0^t F(\tau)e^{-\xi p(t-\tau)}\sin p'(t-\tau)d\tau \qquad (5)$$

(3)式右端第二次的拉氏逆变换为

$$L^{-1}\left[\frac{s+2\xi p}{s^2+2\xi ps+p^2}x_0\right]$$

$$=\frac{x_0}{(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}}e^{-\xi pt}\cos(p't-\phi), \qquad (6)$$

其中 $\phi=tg^{-1}\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$.

(3)式右端第三项的拉氏逆变换就是 V_0 与(4)式的乘积。将(4)～(6)式代入(3)式的拉氏逆变换中，便可求得输出响应的计算公式

$$x(t)=L^{-1}[X(s)]$$

$$=\frac{1}{mp'}\int_0^t F(\tau)e^{-\xi p(t-\tau)}\sin(t-\tau)d\tau$$

$$+\frac{x_0}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi pt}\cos(p't-\phi)$$

$$+\frac{V_0}{p}e^{-\xi pt}\sin p't.$$

例3.11 无质量的小车A，一边用刚度为k的弹簧与固定面相联，另一边通过阻尼系数为c的阻尼器与可动小车B相联。若小车的水平位移按图25(b)所示周期锯齿波规律变化，

试用拉氏变换法求小车 B 的运动规律。

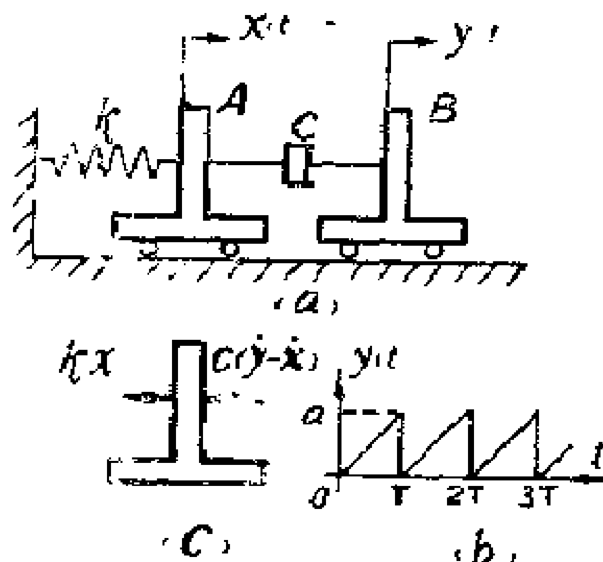


图 25

已知：k，c，a，T，$y(t)=y(t+T)$，

$$y(t)=\frac{a}{T}t \qquad 0<t<T。$$

求：$x(t)$。

解：(1)建立运动微分方程求传递函数。

由图25(c)受力图可列出小车的运动微分方程为

$$c(\dot{y}-\dot{x})-kx=0,$$

即 $$c\dot{x}+kx=c\dot{y}。 \qquad (1)$$

对等式两端取拉氏变换，得

$$(cs+k)X(s)=csY(s)。$$

由此可解得传递函数为

$$G(s)=\frac{X(s)}{Y(s)}=\frac{cs}{cs+k}=\frac{s}{s+k/c} \qquad (2)$$

(2)计算输入的拉氏变换

单个锯齿波可用闸门函数表示为

$$f_1(t)=\frac{a}{T}tU(t)-aU(t-T)-\frac{a}{T}(t-T)U(t-T)$$

式中 $$U(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$

此函数的拉氏变换

$$\begin{aligned}F_1(s)&=L[f_1(t)]\\&=\frac{a}{T}\{L[tU(t)]-L[(t-T)U(t-T)\\&\quad+aTU(t-T)]\}\\&=\frac{a}{T}\left\{\frac{1}{s^2}-\left[\frac{1}{s^2}+\frac{T}{s}\right]e^{-Ts}\right\}\\&=\frac{a}{Ts^2}[1-(Ts+1)e^{-Ts}]。\end{aligned}$$

由公式(3.11)周期函数的拉氏变换的性质，可得锯齿波的拉氏变换为

$$\begin{aligned}F(s)&=\frac{1}{1-e^{-Ts}}F_1(s)\\&=\frac{a}{Ts^2(1-e^{-Ts})}[1-(Ts+1)e^{-Ts}]\\&=\frac{a}{T}\left[\frac{1+Ts}{s^2}-\frac{T}{s(1-e^{-Ts})}\right]\end{aligned}\qquad(3)$$

(3)计算输出的拉氏变换

将(2)、(3)代入公式(3.15)，得

$$\begin{aligned}X(s)&=G(s)Y(s)\\&=\frac{s}{s+k/c}\times\frac{a}{T}\left[\frac{1+Ts}{s^2}-\frac{T}{s(1-e^{-Ts})}\right]\\&=\frac{1}{s+k/c}\left[\frac{1+Ts}{s}-\frac{T}{1-e^{-Ts}}\right]\frac{a}{T}。\end{aligned}$$

(4)

（4）用拉氏逆变换求输出响应

$$x(t)=L^{-1}[X(s)]$$

$$=\frac{a}{T}\left\{L^{-1}\left[\frac{1+Ts}{s(s+k/c)}\right]\right.$$

$$\left.-L^{-1}\left[\frac{T}{(1-e^{-Ts})(s+k/c)}\right]\right\},\qquad(5)$$

其中第一项的拉氏逆变换为

$$L^{-1}\left[\frac{1+Ts}{s(s+k/c)}\right]=L^{-1}\left[\frac{c/k}{s}+\frac{T-c/k}{s+k/c}\right]$$

$$=\frac{c}{k}+(T-c/k)e^{-\frac{k}{c}t}。\qquad(6)$$

第二项的拉氏逆变换为

$$L^{-1}\left[\frac{T}{(s+k/c)(1-e^{-Ts})}\right]$$

$$=L^{-1}\left[\frac{T}{s+k/c}(1+e^{-Ts}+e^{-2Ts}+\cdots)\right]$$

$$=T[e^{-\frac{k}{c}t}U(t)+e^{-\frac{k}{c}(t-T)}U(t-T)$$

$$+e^{-\frac{k}{c}(t-2T)}U(t-2T)+\cdots]$$

$$=Te^{-\frac{k}{c}t}\left(\frac{e^{nkT/c}-1}{e^{kT/c}-1}\right),$$

$$(n-1)T<t<nT。\qquad(7)$$

将（6）、（7）两式代出（5）式得输出响应为

$$x(t)=\frac{a}{T}\left\{\frac{c}{k}+\left(T-\frac{c}{k}\right)e^{-\frac{k}{c}t}\right.$$

$$+Te^{-\frac{k}{c}t}\left(\frac{e^{\frac{kn}{c}T}-1}{e^{\frac{kT}{c}}-1}\right)\Bigg\}$$

$$-a\left\{\frac{c}{kT}+\left[1-\frac{c}{kT}+\frac{e^{nkT/c}-1}{e^{kT/c}-1}\right]e^{-\frac{k}{c}t}\right\}$$

例3.12 试用拉氏变换法求题1.1所示系统在矩形脉冲作用下小车的位移输出响应。

已知：k，c，$F(t)=\begin{cases}a, & 0<t<T;\\ 0, & t>T;\end{cases}$

求：$x(t)$。

解：对小车运动的微分方程

$$c\dot{x}+kx=F(t)。$$

两端作拉氏变换得

$$(cs+k)X(s)=F(s)。$$

由此可求出系统的传递函数

$$G(s)=\frac{1}{cs+k},$$

输入的拉氏变换

$$\bar{F}(s)=\int_0^{\infty}F(t)e^{-st}dt=\int_0^T ae^{-st}dt$$

$$=a\int_0^T-\frac{1}{s}e^{-st}d(-st)=a\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^T$$

$$=a\left[-\frac{e^{-sT}}{s}+\frac{1}{s}\right]=\frac{a}{s}(1-e^{-sT}),$$

由公式(3.15)，确定输出的拉氏变换为

$$X(s)=G(s)F(s)$$

$$= \frac{1}{cs+k} \cdot \frac{a}{s}(1-e^{-sT})$$

$$= \frac{a/c}{s(s+k/c)}(1-e^{-sT})$$

$$= \frac{a}{k}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+k/c}\right](1-e^{-sT}).$$

用拉氏逆变换求输出:

$$x(t) = L^{-1}\{X(s)\}$$

$$= L^{-1}\left[\frac{a}{k}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+k/c}\right)(1-e^{-sT})\right]$$

$$= \frac{a}{k}\left[\left(1-e^{-\frac{k}{c}t}\right)U(t) - \left(1-e^{-\frac{k}{c}(t-T)}\right)U(t-T)\right].$$

例3.13 用拉氏变换法求题1.1所示系统在矩形波作用下小车的位移输出响应。

已知: k, c, a, T, $f(t)=f(t+T)$

$$f(t) = \begin{cases} a, & 0<t<T/2; \\ -a, & T/2<t<T. \end{cases}$$

求: $x(t)$。

解: 由于矩形波激振力是对称的，因此在稳态条件下，后半周期的响应和前半周期的响应完全相似，只要改变一个符号并将时间 t 移动 $T/2$ 即得。这样我们只需研究前半周期内的稳态表达式即可。

输入的拉氏变换为

$$F(s) = L[f(t)], \quad L[a] = \frac{a}{s}. \qquad (1)$$

将(1)式和前例已求出的传递函数

$$G(s)=\frac{1}{cs+k} \tag{2}$$

代入公式(3.15)得

$$X(s)=G(s)F(s)=\frac{1}{cs+k}\cdot\frac{a}{s}.$$

对此再作拉氏逆变换可得

$$x(t)=L^{-1}[X(s)]=L^{-1}\left[\frac{1}{cs+k}\cdot\frac{a}{s}\right]$$

$$=L^{-1}\left[\frac{-1}{s+k/c}+\frac{1}{s}\right]\frac{ca}{k}$$

$$=\frac{ca}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{c}t}\right).$$

习 题 三

3—1 试求出下列微分方程的拉氏变换

(a) $M\frac{d^2x}{dt^2}+C\frac{dx}{dt}+Kx=3t;$

(b) $J\frac{d^2\theta}{dt^2}+C\frac{d\theta}{dt}+K\theta=10\sin\omega t.$

3—2 试求下列各函数的拉氏逆变换

(b) $F(s)=\frac{1}{s(s+1)};$

(b) $F(s)=\frac{1}{(s+2)(s+3)};$

(c) $F(s)=\frac{1}{s^2(s+1)};$

(a) $F(s)=\dfrac{s+1}{s^2+6s+5}$。

3-3 求函数

$$f(t)=\begin{cases}3, & 0\leqslant t<2;\\ 1, & 2\leqslant t<4;\\ 0, & t\geqslant 4.\end{cases}$$

的拉氏变换

3-4 求图3.4周期三角波的拉氏变换。其中

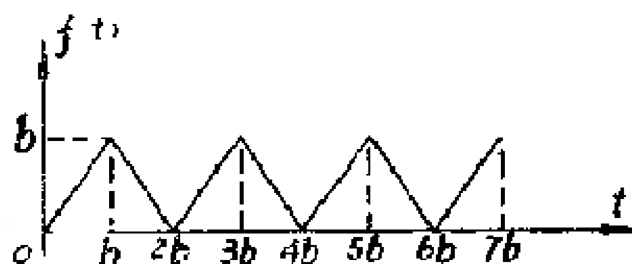


图 3.4

$$f(t)=\begin{cases}t, & 0\leqslant t<b;\\ 2b-t, & b\leqslant t<2b;\end{cases}$$

且 $f(t+2b)=f(t)$。

3-5 求图3.5周期方波的拉氏变换。

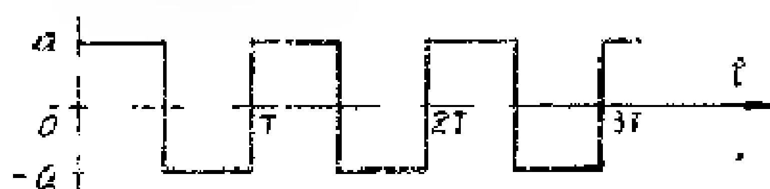


图 3.5

3-6 求图3.6周期函数的拉氏变换

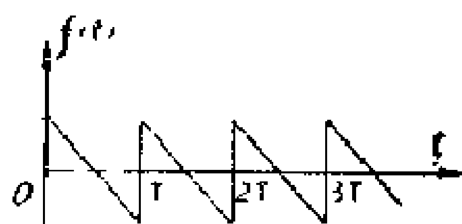


图 3.6

3—7　用拉氏变换法求下列两微分方程的解：

(a) $\ddot{y}+2\dot{y}+3y=e^{-t}$，　$y(0)=0,\ \dot{y}(0)=1$；

(b) $\ddot{y}-2\dot{y}+2y=2e^{t}\cos t$，　$y(0)=\dot{y}(0)=0$

3—8　将作用在质量m_3上的干扰力$F(t)$当作输入(图3.8)，而将质量m_1的位移$x(t)$作为系统的

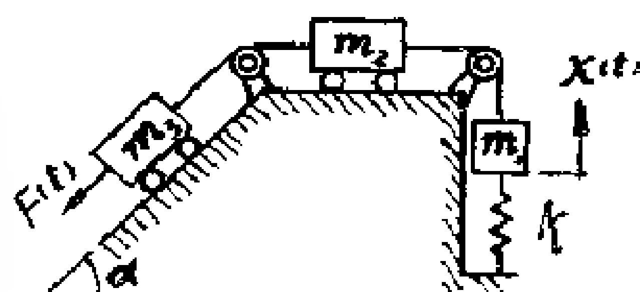


图　3·8

输出。已知，m_1，m_2，m_3，k，在不计绳子的伸长时，试确定系统的传递函数。

3—9　在图3.9所示系统中，两悬臂梁的等效刚度分别为k_1，k_3，若系统的输入是作用在质量上的激振力$F(t)$，输出是质量的位移$x(t)$，已知m，k_1，k_2，k_3，k 等参数，试求系统的传递函数。

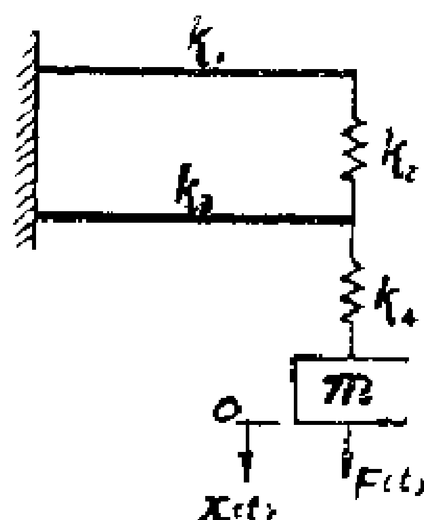


图　3·9

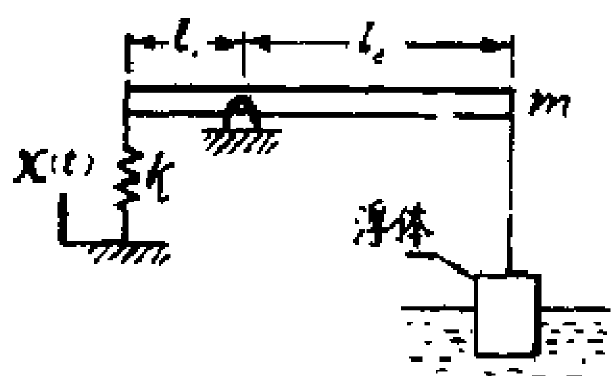


图　3·10

3—10　质量为m的刚性杆，一端用弹簧k与基础相

联，另一端铰接一刚性杆，在刚性杆的另一端连接着横截面积为A的浮体，如图3.10所示。若将基础的铅垂位移当作输入，把浮体的运动视作输出，已知l_1，l_2，k，m和水的比重γ，试确定系统的传递函数。

3-11　在图3.11所示系统中，相互啮合的两摩擦轮可分别绕水平轴O_1与O_2转动，但彼此不能滑动。已知两摩擦轮的质量为m_1，m_2，半径为R_1，R_2，两弹簧的刚度为k_1，k_2。设弹簧端点的运动$x(t)$是系统的输入，大轮m_1的转角$\theta_1(t)$是输出，试求系统的传递函数。

3-12　设图3.12所示系统的输入是弹簧端点的位移

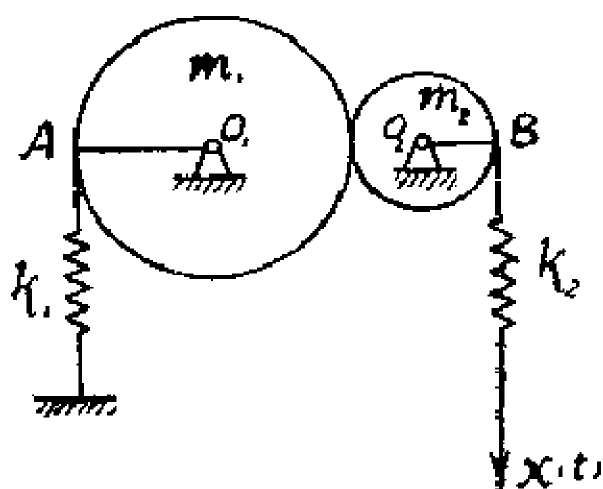


图　3-11

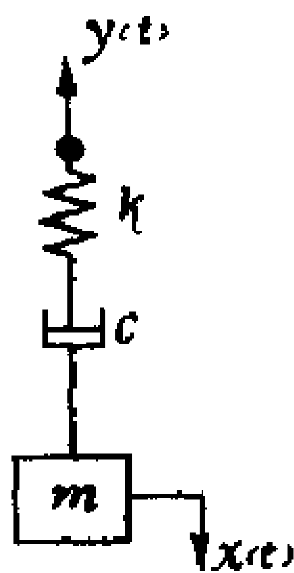


图　3-12

$y(t)$，输出是质量m的位移。若已知m，k，c，试求系统的传递函数。

3-13　图3.13为加速度计的原理图。假设加速度计的壳体安装在飞机机体上，在测量过程中加速度计和水平线的倾角θ保持不变，若以加速度计壳体（即飞机机体）相对于

惯性空间的加速度作为输入量，而以重物相对于壳体的位移作为输出量，试求系统的传递函数。

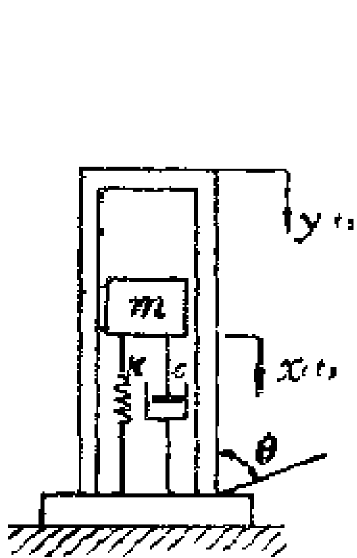


图 3-13

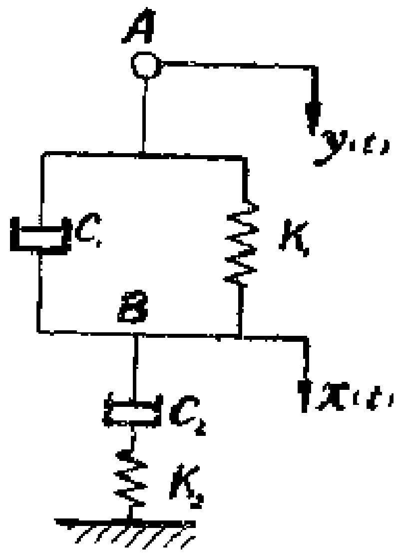


图 3-14

3—14 在图3.14所示的系统中，端点A的位移$y(t)$是输入，中间连接点B的位移$x(t)$是输出。已知两弹簧的刚度K_1，K_2和两阻尼器的阻尼系数C_1，C_2，试求系统的传递函数。

3—15 已知图3.15所示的阻尼弹簧系统中的弹簧刚度K_1，K_2和阻尼器的阻尼系数C_1和C_2。设顶板的平动位移$y(t)$是输入，中间支承板CD的平动位移是输出，在不计板的质量时，试求此系统的传递函数。

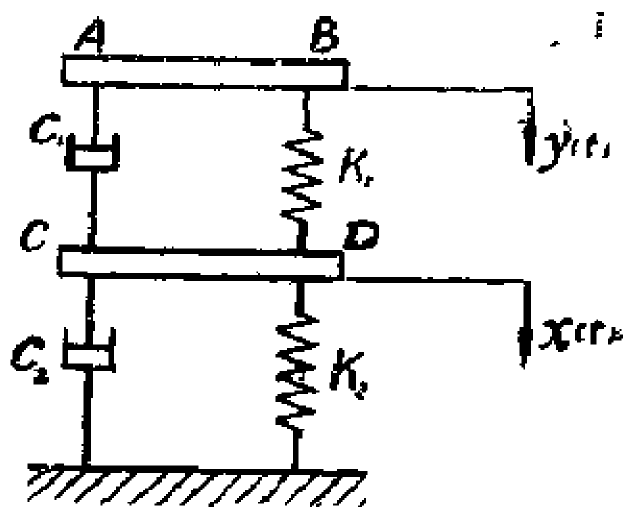


图 3-15

3-16 在图3.16所示的弹簧阻尼系统中，设弹簧K_2

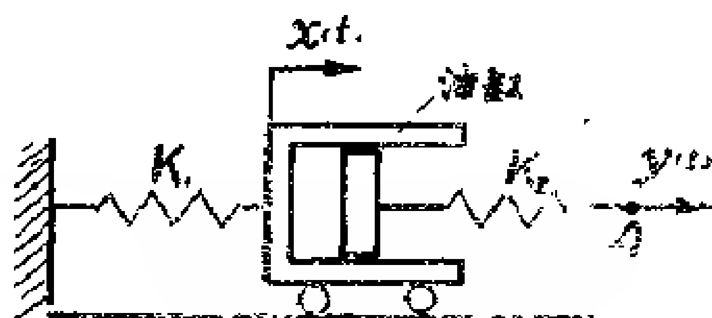


图 3-16

自由端A的运动$y(t)$是输入，油缸的位移$x(t)$是输出，已知弹簧的刚度K_1,K_2,油缸的线性阻尼系数C和油缸质量M，求系统的传递函数。

3-17 质量M用刚度为K_1和K_2的两个弹簧悬挂于壳体内，而壳体又用刚度为K，阻尼系数为C的弹簧阻尼器悬挂于顶面之下。若将作用在壳体上的干扰力$F(t)$视为输入，质量M的绝对位移$x(t)$视为输出，试求系统的传递函数。

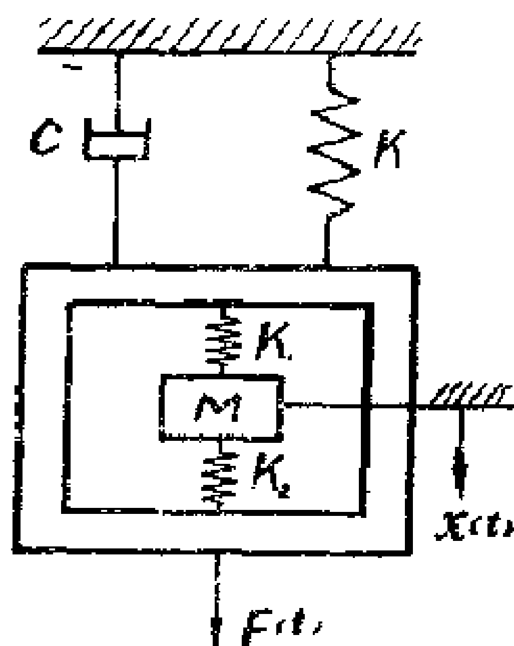


图 3-17

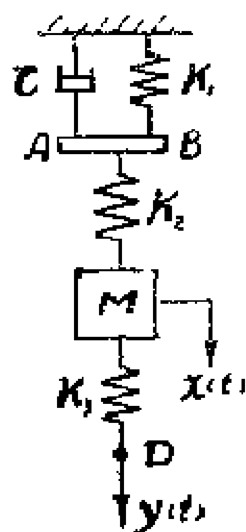


图 3-18

（不计壳体的质量）

3—18　在图3.18所示系统中，刚性杆AB作平运（不计算质量）设弹簧K_3的下端点D的位移$y(t)$是输入，质量M的位移是输出。在已知K_1，K_2，K_3，C，M时，试求系统的传递函数。

3—19　设图3.19所示系统的输入是无质量小车A的位移$y(t)$，输出是质量M的位移$x(t)$，已知M，k_1，k_2和C，在不计中间小车的质量时，求系统的传递函数。

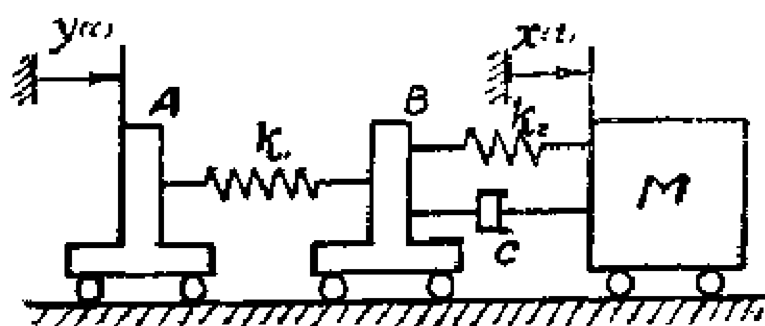


图　3·19

3—20　某系统的传递函数 $G(s)=\dfrac{K}{1+Ts}$，其中常数T和K为已知。试求在激励$y(t)=A\sin\omega t$作用下系统的响应。

3—21　在图3.21所示系统中，水平杠杆是无质量刚性杆，已知a，L，K_1，K_2，m等参数，试用拉氏变换法求在$F(t)=A\sin\omega t$作用下质

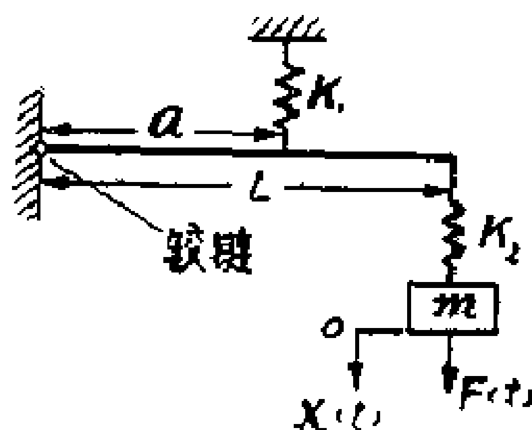


图　3.21

量的位移响应。

3－22　在图3.22所示的系统中若不计滑轮的质量和绳子的伸长，作用在质量m上的激振力$F(t)$是一个单位阶跃函数，已知m，K_1，K_2，设在力开始作用以前，系统处于静止，试用拉氏变换法求质量m的位移输出$x(t)$。

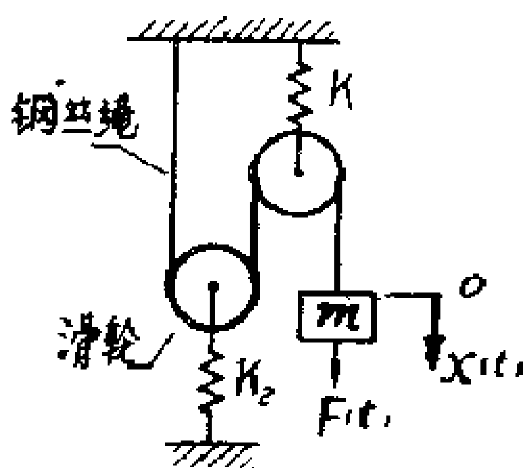
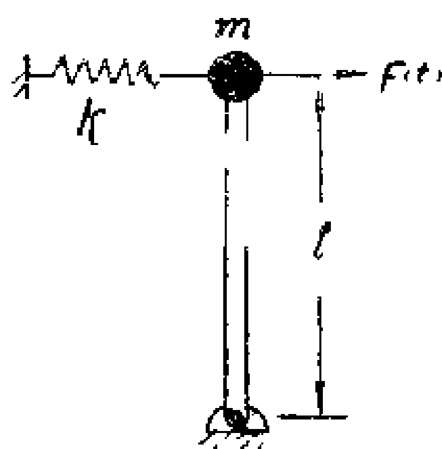


图　3-22

3－23　在图3.23中质量为m的倒置摆与刚度为k的水平弹簧相连，试求在矩形脉冲作用下摆的转角输出响应$\theta(t)$（不计杆的质量）。



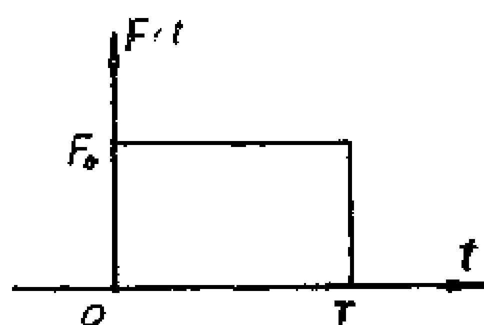
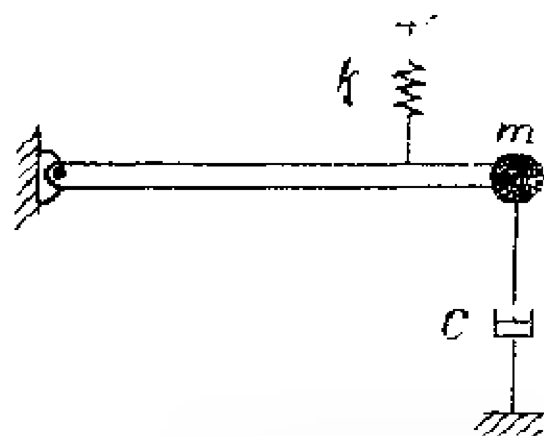


图　3-23

3－24　在图3.24中，质量m上作用有一个阶跃干扰力$F(t)=a$，且已知k，m，c。当$t=0$时，系统处于静止。

试用拉氏变换法求质量m的运动响应。



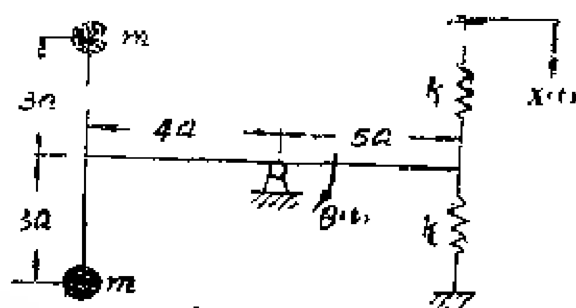
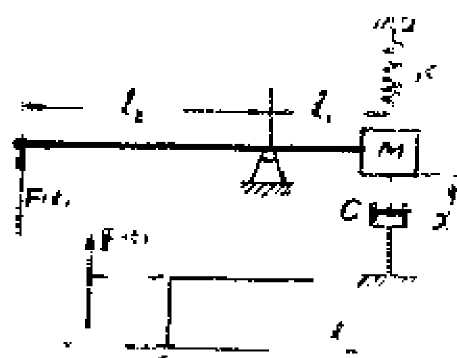


图 3·24　　　　图 3·25

3—25　在图3.25所示系统中，设支座的位移输入$x(t) = A_0 \sin \omega t$。当$t=0$时系统处于静止状态。在已知k，m，a时试用拉氏变换法求系统的转角输出响应$\theta(t)$。

3—26　在图3.26所示机械系统上作用的阶跃函数激振力$F(t)$不是从$t=0$开始，而是延迟到$t=t_1$开始。已知M，K，C，l_1，l_2时，试用拉氏变换法求质量M的位移输出响应。（计算中不计杠杆质量）



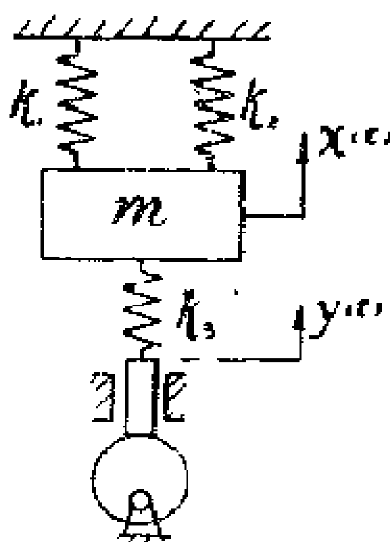


图 3·26　　　　图 3·27

3—27　图3.27所示的系统被正弦凸轮激发而产生振

动，已知 m，r，k_2，k，$y(t)=a\sin\omega t$，当 $t=0$ 时，$\dot{x}(0)=x(0)=0$，试用传递函数法求质量 m 的位移输出响应。

3－28　试用传递函数法解单自由度阻尼质量弹簧系统在单位脉冲 $\delta(t)$ 作用下的位移输出响应。

3－29　弹簧下端挂着 P 牛顿的重物，它的上端随滑道连杆机构作简谐运动，其规律为 $OB=a\sin\omega t$。已知 $P=4N$，$k=0.4N/cm$，$a=2cm$，$\omega=7$ ，当 $t=0$ 时，系统处于静止。试用拉氏变换法求系统的强迫振动。

3－30　汽车前轮（弹簧，轮胎，减振器）简化系统如图3.30所示。若路面起伏不平而使弹簧 k_1 下端产生的运动为 $x(t)=A_0\sin\omega t$，已知 k，k_1，c，m，A_0，ω。试用拉氏变换法求位移输出响应 $y(t)$。

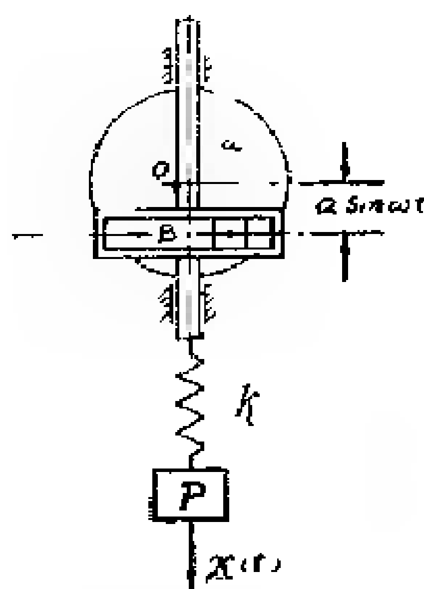


图　3·29

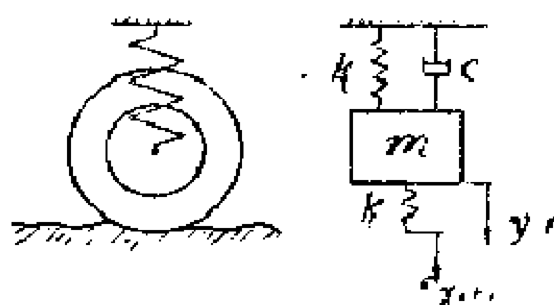


图　3·30

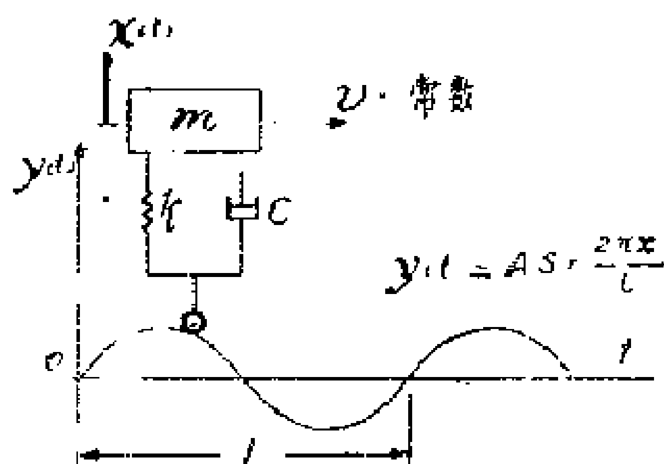


图　3·31

3－31　图3.31是汽车在粗糙路面上行驶时的简化模

型。当汽车以等速 v =常数行驶时，试用拉氏变换法计算位移输出响应。（图3.31中的参数均为已知）

3—32　在图3.32所示系统中，不计质量的杠杆可绕 O 点转动。若弹簧端点 A 输入的位移为 $y(t)=a\sin\omega t$，已知 $m_1, m_2, k_1, k_2, l_1, l_2$，试用拉氏变换法求质量 m_2 的振动规律。

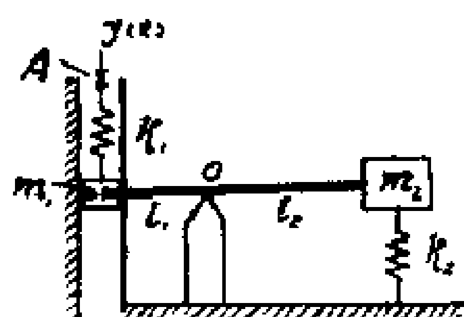


图　3-32

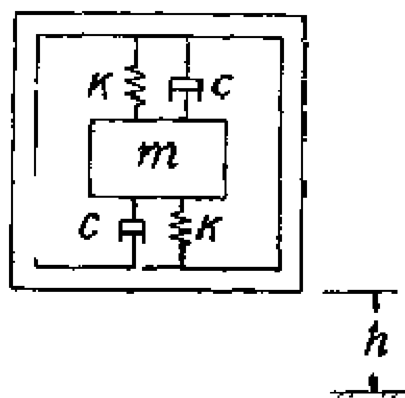


图　3-33

3—33　一个加有支承垫的包装物从高 $h=5m$ 处落下，如图3.33所示。假设落地后不再回跳。已知 $m=2kg$，$K=2000N/m$，$C=4N\cdot s/m$。试用拉氏变换法求落地后质量 m 的运动规律。

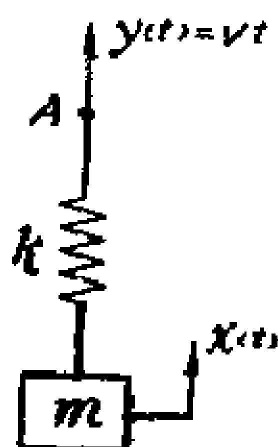


图　3-34

3—34　图3.34所示质量弹簧系统的 A 端沿铅垂直线作匀速运动。若已知 m，k，v，当 $t=0$ 时，$x(0)=\dot{x}(0)=0$。试用传递函数法求质量 m 的运动规律。

3　35　试求图3.35所示系统在周期矩形脉冲激振力作用下 AB 杆的位移输出响应。已知 k，c，F_0，τ，T，假设 AB 杆作平动且可忽略其质量。

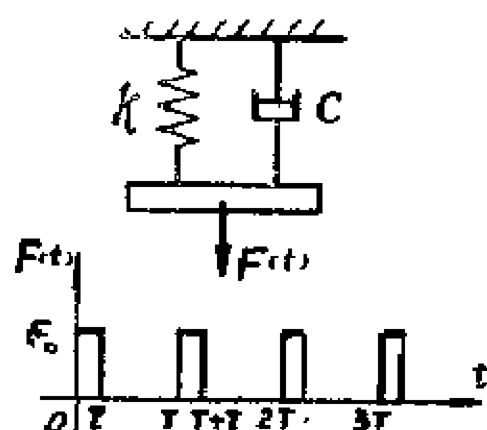


图　3　35

第　四　章

多自由度系统的动态特性及响应的计算

内　容　提　要

多自由度系统的振动问题，一般都是图26所示的多输入与多输出情况，这种系统的动态特性可分别用脉冲响应矩阵 $h(\tau)$、频率响应矩阵 $H(\omega)$ 和传递矩阵 $G(s)$ 来描述。

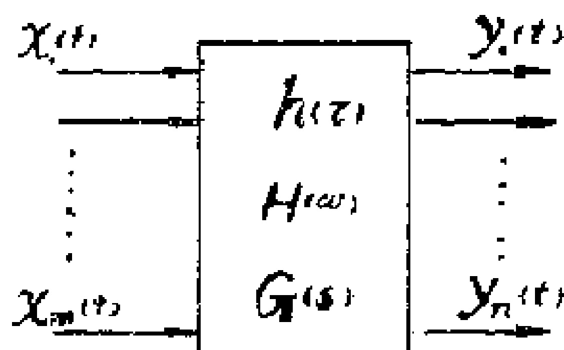


图 26

§4.1　系统的脉冲响应矩

系统的 m 个输入 $x_1(t)$，$x_2(t)$，$x_3(t)$，…，$x_m(t)$ 可以表示成列矩阵的形式

$$X(t)=\{x(t)\}=\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{Bmatrix} \tag{4.1}$$

此矩阵的转置矩阵就是系统输入的行矩阵

$$X^T(t)=[x_1(t)x_2(t)x_3(t)\cdots x_m(t)]。\tag{4.2}$$

系统的 n 个输出 $y_1(t)$，$y_2(t)$，$y_3(t)$，…，$y_n(t)$ 也可用

列矩阵和行矩阵表示为

$$Y(t)=[y(t)]=\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} \qquad (4.3)$$

或

$$Y^T(t)=[y_1(t)\,y_2(t)\,y_3(t)\cdots y_n(t)] \qquad (4.4)$$

作用在系统上的任一个输入 $x_i(t)$ $(i=1,2,3,\cdots,m)$，所引起的每一个输出 $y_{1i}(t)$，$y_{2i}(t)$，$\cdots$，$y_{ni}(t)$ 决定于相应的脉冲响应函数 $h_{1i}(\tau)$、$h_{2i}(\tau)$、$h_{3i}(\tau)$，$\cdots$，$h_{ni}(\tau)$，即有关系

$$\begin{aligned} y_{1i}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_{1i}(t-\tau)x_i(\tau)d\tau; \\ y_{2i}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_{2i}(t-\tau)x_i(\tau)d\tau; \\ &\vdots \\ y_{ni}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_{ni}(t-\tau)x_i(\tau)d\tau. \end{aligned} \qquad (4.5)$$

$i=1,2,3,\cdots,m$。

可见决定系统输入，输出关系的动态特性，应由 $m\times n$ 个脉冲响应函数来确定，它们可排成如下的脉冲响应矩阵

$$h(\tau)=[h_{ki}(\tau)]=\begin{bmatrix} h_{11}(\tau) & h_{12}(\tau)\cdots & h_{1m}(\tau) \\ h_{21}(\tau) & h_{22}(\tau)\cdots & h_{2m}(\tau) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{n1}(\tau) & h_{n2}(\tau)\cdots & h_{nm}(\tau) \end{bmatrix} \qquad (4.6)$$

根据线性系统的迭加原理和公式(4.5)便可用脉冲响应矩阵来表示系统的输出与输入间的矩阵关系

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} = \int_0^t \begin{bmatrix} h_{11}(t-\tau) \\ h_{21}(t-\tau) \\ \vdots \\ h_{n1}(t-\tau) \end{bmatrix}$$

$$
\begin{matrix}
h_{12}(t-\tau)\cdots h_{1m}(t-\tau) & & x_1(\tau) & \\
h_{22}(t-\tau)\cdots h_{2m}(t-\tau) & \cdot & x_2(\tau) & d\tau \\
\vdots \qquad\quad \vdots & & \vdots & \\
h_{n2}(t-\tau)\cdots h_{nm}(t-\tau) & & x_n(\tau) &
\end{matrix}
$$

或
$$[Y]=\int_0^t [h(t-\tau)][X(\tau)]d\tau, \qquad (4.8)$$

式中
$$y_k(t)=\sum_{i=1}^{m}\int_0^t h_{ki}(t-\tau)x_i(\tau)d\tau, \qquad (4.9)$$

$$k=1,2,3\cdots n$$

在脉冲响应矩阵（4.6）式中的每一个元素均可按§2.3中脉冲响应函数的定义来确定。但是在求多自由度系统的脉冲响应矩阵时，每次只能用一个单位脉冲来代替一个输入的作用，而令其他的输入都为零，所求得的输出响应就是对应于此输入的脉冲响应函数。因此，系统有几个输入便要计算几次单位脉冲输入的响应，才能求出脉冲响应矩阵，其步骤如下*：

（1）分析力和运动，建立系统的运动微分方程组。

（2）用单位脉冲 $\delta(t)$ 代替某个真实输入，而令其余的输入为零。

（3）采用特殊方法求出与单位脉冲等效的初始条件（一般采用从 0_- 到 0_+ 对全式两端作跨零积分）。

（4）求齐次线性微分方程组满足（步骤3）等效初始条件的通解，即得对应于此输入的几个脉冲响应函数。

（5）再依次应用2～4的步骤继续求出每个输入所对应的脉冲响应函数。

（6）将求得的脉冲响应函数组成系统的脉冲响应矩阵。

* 也可用矩阵运算直接求脉冲响应矩阵

例4—1 在图27所示系统中，轴AB两端固定。两个刚性圆盘的转动惯量均匀为J，各轴段的刚度均为c。设输入是作用在两个圆盘上的激振力矩$M_1(t)$和$M_2(t)$。输出是两圆盘的转角$\theta_1(t)$和$\theta_2(t)$，在不计轴的质量和系统阻尼的条件下，试求系统的脉冲响应矩阵。

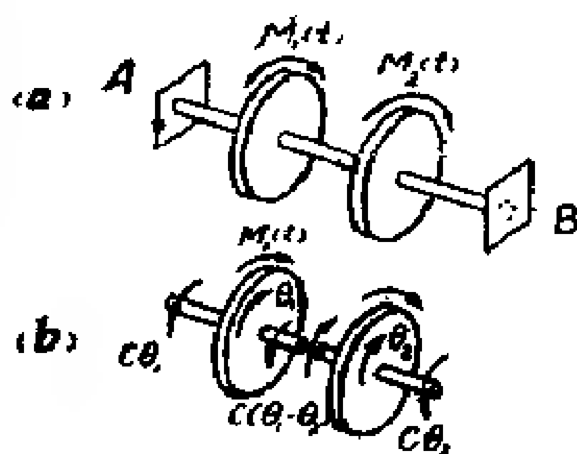


图 27

已知：J，c。

求：$h(\tau)$。

解：根据图27（b）所示的受力情况，可列出系统的运动微分方程式：

$$J\ddot{\theta}_1 = M_1(t) - c\theta_1 - c(\theta_1 - \theta_2),$$

$$J\ddot{\theta}_2 = M_2(t) - c\theta_2 + c(\theta_1 - \theta_2);$$

或

$$J\ddot{\theta}_1 + 2c\theta_1 - c\theta_2 = M_1(t)$$

$$J\ddot{\theta}_2 + 2c\theta_2 - c\theta_1 = M_2(t)$$

为了求对应于输入$M_1(t)$的脉冲响应函数$h_{11}(\tau)$，$h_{21}(\tau)$，令

$$M_1(t) = \delta(t), \qquad M_2(t) = 0.$$

$$\theta_1(0_-) = \theta_2(0_-) = 0, \qquad \dot{\theta}_1(0_-) = \dot{\theta}_2(0_-) = 0;$$

则(a)式变为

$$J\ddot{\theta}_1 + 2c\theta_1 - c\theta_2 = \delta(t),$$

$$J\ddot{\theta}_2 + 2c\theta_2 - c\theta_1 = 0. \qquad (b)$$

对(b)中各式分别作跨零积分，得

$$\int_{0}^{0_+}(J\ddot{\theta}_1+2c\theta_1-c\theta_2)dt=\int_{0_-}^{0_+}\delta(t)dt,$$

$$\int_{0}^{0_+}(J\ddot{\theta}_2+2c\theta_2-c\theta_1)dt=0;$$

其中 $$\int_{0}^{0_+}\ddot{\theta}_i dt=\dot{\theta}_i(0_+)-\dot{\theta}_i(0\ )=\dot{\theta}_i(0_+);$$

$$\int_{0_-}^{0^+}\theta_1 dt=\int_{0}^{0_+}\theta_2 dt=0, \qquad i=1,\ 2.$$

由此可求得

$$\dot{\theta}_1(0_+)=\frac{1}{J},\quad \dot{\theta}_2(0_+)=0$$

于是求解脉冲响应函数的问题就相当于求解如下的齐次线性微分方程组

$$\begin{aligned}&J\ddot{\theta}_1+2c\theta_1-c\theta_2=0,\\&J\ddot{\theta}_2+2c\theta_2-c\theta_1=0;\end{aligned}\qquad (c)$$

满足初始条件

$$\begin{aligned}t=0\text{时}\quad &\theta_1(0)=0,\quad \dot{\theta}_1(0)=\frac{1}{J},\\&\theta_2(0)=0,\quad \dot{\theta}_2(0)=0.\end{aligned}\qquad (d)$$

的通解。可令(c)的解为

$$\theta_1=A_1\sin pt,\qquad \theta_2=A_2\sin pt \qquad (e)$$

代入(c)式得

$$\begin{aligned}&(2c-Jp^2)A_1-cA_2=0;\\&-cA_1+(2c-Jp^2)A_2=0.\end{aligned}\qquad (f)$$

由此可写出确定固有频率的特征方程为

$$(2c-Jp^2)(2c-Jp^2)-c^2=0,$$

或
$$(3c-Jp^2)(c-Jp^2)=0$$

由此可求出系统的两个固有频率

$$p_1=\sqrt{\frac{c}{J}}, \qquad p_2=\sqrt{\frac{3c}{J}}. \tag{g}$$

分别将（g）式中的 p_1，p_2 代入（f）式，即可得到系统的两个振型：

$$\gamma_1=\frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}}=\frac{2c-Jp_1^2}{c}=1,$$

$$\gamma_2=\frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}}=\frac{2c-Jp_2^2}{c}=-1.$$

于是可写出（c）的通解为：

$$\theta_1=A_1^{(1)}\sin p_1t+A_1^{(2)}\sin p_2t,$$

$$\theta_2=\gamma_1A_1^{(1)}\sin p_1t+\gamma_2A_1^{(2)}\sin p_2t \tag{h}$$

$$=A_1^{(1)}\sin p_1t-A_1^{(2)}\sin p_2t.$$

再对（h）式求导：

$$\dot{\theta}_1=A_1^{(1)}p_1\cos p_1t+A_1^{(2)}p_2\cos p_2t, \tag{i}$$

$$\dot{\theta}_2=A_1^{(1)}p_1\cos p_1t-A_2^{(2)}p_2\cos p_2t.$$

代入起始条件（d）得

$$\frac{1}{J}=A_1^{(1)}p_1+A_1^{(2)}p_2,$$

$$) \quad A_1^{(1)} p \quad A_1^{(2)} p_2.$$

由此解得

$$A_1^{(1)} = \frac{1}{2Jp_1} = \frac{1}{2J}\sqrt{\frac{J}{c}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{cJ}},$$

$$A_1^{(2)} = \frac{1}{2Jp_2} = \frac{1}{2J}\sqrt{\frac{J}{3c}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3cJ}}.$$

将以上结果代入(h)式，得到相应的脉冲响应函数

$$\left.\begin{aligned} h_{11}(\tau) &= \theta_1(\tau) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{cJ}}\left\{\sin\sqrt{\frac{c}{J}}\tau + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{\frac{3c}{J}}\tau\right\}, \\ h_{12}(\tau) &= \theta_2(\tau) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{cJ}}\left\{\sin\sqrt{\frac{c}{J}}\tau - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{\frac{3c}{J}}\tau\right\} \end{aligned}\right\} \quad (j)$$

为了求对应于输入 $M_2(t)$ 的脉冲响应函数 $h_{21}(\tau)$， $h_{22}(\tau)$，令

$$M_2(t) = \delta(t), \qquad M_1(t) = 0,$$

$$\theta_1(0_-) = \theta_2(0_-) = 0, \qquad \dot{\theta}_1(0_-) = \dot{\theta}_2(0_-) = 0;$$

然后求在此单位脉冲作用下系统的微分方程组

$$\left.\begin{aligned} J\ddot{\theta}_1 + 2c\theta_1 - c\theta_2 &= 0, \\ J\ddot{\theta}_2 + 2c\theta_2 - c\theta_1 &= \delta(t). \end{aligned}\right\} \quad (k)$$

满足此起始条件的解，从而得到与此单位脉冲作用等效的起始条件。

$$\left.\begin{aligned} &\theta_1(0_+) = 0, \qquad \theta_2(0_+) = 0, \\ &\dot{\theta}_1(0_+) = 0, \qquad \dot{\theta}_2(0_+) = \frac{1}{J}. \end{aligned}\right\} \quad (l)$$

最后便可由满足此初始条件的自由振动运动微分方程(c)的解，按求 $h_{11}(\tau)$ 和 $h_{21}(\tau)$ 相似的过程解出要求的脉冲响应函数

$$
h_{12}(\tau)=\frac{1}{2\sqrt{cJ}}\left\{\sin\sqrt{\frac{c}{J}}\,\tau-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{\frac{3c}{J}}\,\tau\right\}
$$

$$
h_{22}(\tau)=\frac{1}{2\sqrt{cJ}}\left\{\sin\sqrt{\frac{c}{J}}\,\tau+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{\frac{3c}{J}}\,\tau\right\}
\qquad (m)
$$

由(l)，(m)两式可写出系统的脉冲响应矩阵：

$$
h(\tau)=\begin{bmatrix} h_{11}(\tau) & h_{12}(\tau)\\ h_{21}(\tau) & h_{22}(\tau)\end{bmatrix}
=\frac{1}{2\sqrt{cJ}}\begin{bmatrix}
\sin\sqrt{\frac{c}{J}}\,\tau+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{\frac{3c}{J}}\,\tau, &
\sin\sqrt{\frac{c}{J}}\,\tau-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{\frac{3c}{J}}\,\tau,\\
\sin\sqrt{\frac{c}{J}}\,\tau-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{\frac{3c}{J}}\,\tau &
\sin\sqrt{\frac{c}{J}}\,\tau+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{\frac{3c}{J}}\,\tau
\end{bmatrix}.
$$

§4.2 频率响应矩阵表示的输入、输出关系

作用在系统上的任一输入 $x_i(t)$ 所激发的输出 $y_{1i}(t)$， $y_{2i}(t)$，…， $y_{ni}(t)$ 的富氏变换均可由式(1.3)来确定，即

$$
F(y_{ki})=H_{ki}(\omega)F(x_i)\qquad \begin{matrix} k=1,2,3,\cdots,n;\\ i=1,2,3,\cdots,m.\end{matrix}\qquad (4.10)
$$

式中
$$
F(y_{ki})=\int_{-\infty}^{\infty} y_{ki}\,e^{-i\omega t}dt \qquad (4.11)
$$

是第 i 个输入 $x_i(t)$ 引起的第 k 个输出分量的富氏变换。

$$F[x_i] = \int_{-\infty}^{\infty} x_i(t) e^{-j\omega t} dt \tag{4.12}$$

是第 i 个输入 $x_i(t)$ 的富氏变换。

对式(4.10)作富氏逆变换可求得任一输入 $x_i(t)$ 所激发的输出为

$$y_{ki}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F[y_{ki}] e^{j\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{ki}(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_i(t) e^{-j\omega t} dt \right] e^{j\omega t} d\omega \tag{4.13}$$

由此可见，作用在系统上的任一输入 $x_i(t)$ 所激发的每一个输出 $y_{1i}(t)$，$y_{2i}(t)$，…，$y_{ni}(t)$ 都决定于相应的频率响应函数 $H_{1i}(\omega)$，$H_{2i}(\omega)$，…，$H_{ni}(\omega)$，因而决定输出、输入关系的动态特性应由 $m \times n$ 个频率响应函数来确定，它们可排成一个矩阵

$$H(\omega) = [H_{ki}(\omega)] = \begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) \cdots & H_{1m}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) \cdots & H_{2m}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{n1}(\omega) & H_{n2}(\omega) \cdots & H_{nm}(\omega) \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

这就是表示系统动态特性的频率响应矩阵。

由于每一个频率响应函数 $H_{ki}(\omega)$ 与相应的脉冲响应函数 $h_{ki}(\tau)$ 组成一个富氏变换对，即

$$H_{ki}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{ki}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau,$$

$$h_{ki}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{ki}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \tag{4.15}$$

于是频率响应矩阵与脉冲响应矩阵之间也应存在着相似的变换关系：

$$[H_{k1}(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} [h_{k1}(\tau)] e^{-j\omega\tau} d\tau, \qquad (4.16)$$

$$[h_{k1}(\tau)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [H_{k1}(\omega)] e^{j\omega\tau} d\omega.$$

根据线性系统的迭加原理和式(4.10)（4.14），便可用频率响应矩阵来表示系统的输出、输入关系：

$$\begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) & \cdots & H_{1m}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) & \cdots & H_{2m}(\omega) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ H_{n1}(\omega) & H_{n2}(\omega) & \cdots & H_{nm}(\omega) \end{bmatrix} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{Bmatrix} e^{-j\omega t} dt \right\} e^{j\omega t} d\omega$$

(4.17)

$$[y_k] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [H_{kl}(\omega)] \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [x_l] e^{-j\omega t} dt \right\} e^{j\omega t} d\omega.$$

(4.18)

频率响应矩阵中的元素可以按§1.2单个频率响应函数的定义来求出，即在一个单位幅值简谐激励输入作用下系统输出响应的幅值。所谓单位幅值简谐输入是指在计算时应令其他的输入为零，只讨论在一个单位幅值简谐输入下的几个输出响应，它们的幅值就是相应的频率响应函数，因此具有几个输入的系统必须计算几次单位幅值简谐输入下的响应，才能求出系统的频率响应矩阵。具体的步骤如下*：

（1）分析运动和力，建立系统的运动微分方程式。

* 也可用矩阵运算直接求频率响应矩阵

(2) 用单位幅值谐波输入代替真实输入，而令其余的输入为零，即

$$x_i(t)=e^{j\omega t},\quad x_k(t)=0,\quad k=1,2,\cdots,n,\quad k\neq i.$$

(3) 设单位幅值简谐输入下的输出为

$$y_{1i}(t)=H_{1i}(\omega)e^{j\omega t},$$

$$y_{2i}(t)=H_{2i}(\omega)e^{j\omega t}\cdots\cdots,y_{ni}(t)=H_{ni}(\omega)e^{j\omega t}.$$

求解微分方程，求对应于此输入的频率响应函数。

(4) 依次求每个输入对应的频率响应函数，确定系统的频率响应矩阵。

例4.2 确定例4.1中系统的频率响应矩阵。

已知：J、c。

求 $H(\omega)$，

解：在例4.1中已求出系统的运动微分方程

$$\begin{aligned}&J\ddot{\theta}_1+2c\theta_1-c\theta_2=M_1(t)\\&J\ddot{\theta}_2+2c\theta_2-c\theta_1=M_2(t)\end{aligned}\qquad(a)$$

为了求系统的频率响应函数 $H_{11}(\omega)$，$H_{21}(\omega)$，令

$$M_1(t)=e^{j\omega t},\qquad M_2(t)=0,$$

$$\theta_1(t)=H_{11}(\omega)e^{j\omega t},\qquad \theta_2(t)=H_{21}(\omega)e^{j\omega t}$$

$$\dot{\theta}_1(t)=j\omega H_{11}(\omega)e^{j\omega t},\qquad \dot{\theta}_2(t)=j\omega H_{21}(\omega)e^{j\omega t},$$

$$\ddot{\theta}_1(t)=-\omega^2H_{11}(\omega)e^{j\omega t},\qquad \ddot{\theta}(t)=-\omega^2H_{21}(\omega)e^{j\omega t}.$$

将它们代入(a)式得

$$\begin{aligned}&(2c-J\omega^2)H_{11}(\omega)e^{j\omega t}-cH_{21}(\omega)e^{j\omega t}=e^{j\omega t},\\&-cH_{11}(\omega)e^{j\omega t}+(2c-J\omega^2)H_{21}(\omega)e^{j\omega t}=0.\end{aligned}\qquad(b)$$

由此可解得

$$H_{11}(\omega)=\frac{\begin{vmatrix}1 & -c\\ 0 & 2c-J\omega^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2c-J\omega^2 & -c\\ -c & 2c-J\omega^2\end{vmatrix}}$$

$$=\frac{2c-J\omega^2}{(3c-J\omega^2)(c-J\omega^2)},$$

$$H_{21}(\omega)=\frac{c}{(3c-J\omega^2)(c-J\omega^2)}.$$

同理，再令：

$$M_2(t)=e^{j\omega t},\qquad M_1(t)=0;$$

$$\theta_1(t)=H_{12}(\omega)e^{j\omega t},\qquad \theta_2(t)=H_{22}(\omega)e^{j\omega t}$$

代入(a)式后，可解得

$$H_{22}(\omega)=\frac{c}{(3c-J\omega^2)(c-J\omega^2)};$$

$$H_{22}(\omega)=\frac{2c-J\omega^2}{(3c-J\omega^2)(c-J\omega^2)}.$$

由求得的$H_{11}(\omega)$，$H_{12}(\omega)$，$H_{21}(\omega)$，$H_{22}(\omega)$，可写出系统的频率响应矩阵

$$H(\omega)=\begin{bmatrix}H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega)\\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega)\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{(3-J\omega^2)(c-J\omega^2)}\begin{bmatrix}2c-J\omega^2 & c\\ c & 2c-J\omega^2\end{bmatrix}.$$

例4.3 支持于板簧上的车身重 $p=mg=4370N$，前后支承的刚度分别为$k_1=238N/cm$，$k_2=357N/cm$，汽车重心到前后支承的距离分别为$l_1=1.22m$，$l_2=1.52m$，相对于质心的回转半径$\rho^2=1.21m^2$。设两个支点的垂直位移$x_1(t)$与$x_2(t)$作为系统的输入，而以重心c的铅垂位移$y(t)$和绕

重心的转角 $\theta(t)$ 作为系统的响应。试求系统的频率响应矩阵。

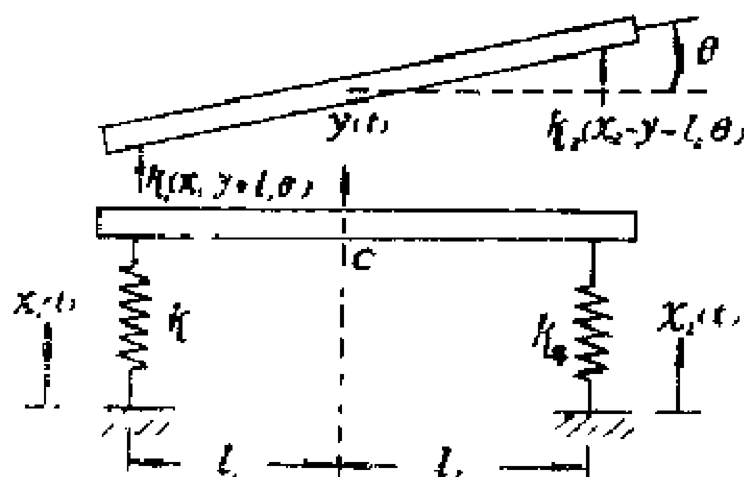


图 28

已知：$P = mg = 4370N$，

$k_1 = 238N/cm$，

$k_2 = 357N/cm$，

$l_1 = 1.22m$，

$l_2 = 1.52m$，　　$\rho^2 = 1.21m^2$。

求：$H(\omega)$。

解： 根据图 28 所示的受力情况，由力学的运动定律可列出车身的运动微分方程式

$$m\ddot{y} = k_1(x_1 - y + l_1\theta) + k_2(x_2 - y - l_2\theta),$$

$$m\rho^2\ddot{\theta} = l_2k_2(x_2 - y - l_2\theta) - l_1k_1(x_1 - y + l_1\theta). \tag{a}$$

即

$$m\ddot{y} + (k_1 + k_2)y + (k_2l_2 - k_1l_1)\theta = k_1x_1 + k_2x_2,$$

$$m\rho^2\ddot{\theta} + (k_2l_2^2 + k_1l_1^2)\theta + (k_2l_2 - k_1l_1)y = -l_1k_1x_1 + l_2k_2x_2. \tag{b}$$

令

$$a = \frac{k_1 + k_2}{m}, \qquad b = \frac{-k_1l_1 + k_2l_2}{m},$$

$$c = \frac{l_1^2k_1 + l_2^2k_2}{m}, \qquad d_1 = \frac{k_1}{m},$$

$$d_2 = \frac{k_2}{m}, \qquad e_1 = \frac{l_1k_1}{m\rho^2},$$

$$e_2 = \frac{l_2k_2}{m\rho^2}. \tag{c}$$

可以将(b)式简化成

$$\ddot{y}+ay+b\theta=d_1x_1+d_2x_2,$$

$$\ddot{\theta}+\frac{c}{\rho^2}\theta+\frac{b}{\rho^2}y=-e_1x_1-e_2x_2. \qquad (d)$$

为了求 y、θ 对应于输入的频率响应特性，应在(d)式中令

$$x_1=e^{j\omega t},\qquad x_2=0;$$

$$y=H_{11}(\omega)e^{j\omega t},\quad \theta=H_{21}(\omega)e^{j\omega t}$$

将它们及其有关的二阶导数代入(d)式，消去公因子 $e^{j\omega t}$ 可得

$$(a-\omega^2)H_{11}(\omega)+bH_{21}(\omega)=d_1,$$

$$\frac{b}{\rho^2}H_{11}(\omega)+\left(\frac{c}{\rho^2}-\omega^2\right)H_{21}(\omega)=-e_1.$$

由此可解出

$$H_{11}(\omega)=\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b \\ -e_1 & \dfrac{c}{\rho^2}-\omega^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a-\omega^2 & b \\ \dfrac{b}{\rho^2} & \left(\dfrac{c}{\rho^2}-\omega^2\right) \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{\left(\dfrac{c}{\rho^2}-\omega^2\right)d_1+be_1}{\omega^4-\left(\dfrac{c}{\rho^2}+a\right)\omega^2+\dfrac{ac-b^2}{\rho^2}}, \qquad (e)$$

$$H_{21}(\omega)=\frac{-(a-\omega^2)e_1-\dfrac{bd_1}{\rho^2}}{\omega^4-\left(\dfrac{c}{\rho^2}+a\right)\omega^2+\dfrac{ac-b^2}{\rho^2}}. \qquad (f)$$

为了求 y、θ 对应于输入 x_2 的频率响应特性，应在(d)式

中令

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = e^{i\omega t};$$

$$y = H_{12}(\omega)e^{i\omega t}, \qquad \theta = H_{22}(\omega)e^{i\omega t}.$$

将它们及有关的二阶导数代入(d)式，消去公因子 $e^{i\omega t}$ 后可得

$$(a-\omega^2)H_{12}(\omega) + bH_{22}(\omega) = d_2,$$

$$\frac{b}{\rho^2}H_{12}(\omega) + \left(\frac{c}{\rho^2} - \omega^2\right)H_{22}(\omega) = e_2.$$

由此可解出

$$H_{12}(\omega) = \frac{\left(\frac{c}{\rho^2} - \omega^2\right)d_2 - be_2}{\omega^4 - \left(\frac{c}{\rho^2} + a\right)\omega^2 + \frac{ac-b^2}{\rho^2}}, \tag{g}$$

$$H_{22}(\omega) = \frac{(a-\omega^2)e_2 - \frac{bd_2}{\rho^2}}{\omega^4 - \left(\frac{c}{\rho^2} + a\right)\omega^2 + \frac{ac-b^2}{\rho^2}}. \tag{h}$$

由公式(e)，(f)，(g)，(h)可写出所求的频率响应矩阵

$$H(\omega) = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12}(\omega) \\ H_{21} & H_{22}(\omega) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} \left(\frac{c}{\rho^2} - \omega^2\right)d_2 + be_2 & \left(\frac{c}{\rho^2} - \omega^2\right)d_2 - be_2 \\ -(a-\omega^2)e_1 - \frac{bd_1}{\rho^2} & (a-\omega^2)e_2 - \frac{bd_2}{\rho^2} \end{bmatrix}}{\omega^4 - \left(\frac{c}{\rho^2} + a\right)\omega^2 + \frac{ac-b^2}{\rho^2}},$$

式中

$$a=\frac{k_1+k_2}{m}=133.5;\quad d_1=\frac{k_1}{m}=53.4;$$

$$b=\frac{k_2l_2-k_1l_1}{m}=56.6;\quad d_2=\frac{k_2}{m}=80.2;$$

$$c=\frac{l_1k_1+l_2k_2}{m}=264.6;\quad e_1=\frac{l_1k_1}{m\rho^2}=53.8;$$

$$\rho^2=1.21m^2;\qquad e_2=\frac{l_2k_2}{m\rho^2}=100.6.$$

§4.3 多自由度系统的传递函数及其求法

对于具有m个输入和n个输出的多自由度系统，设任一输出量$y_k(t)(k=1,2,\cdots,n)$与第i个输入量$x_i(t)(i=1,2,\cdots,m)$之间的传递函数为$G_{ki}(s)$，那么，第k个输出的拉氏变换$Y_k(s)$与m个输入的拉氏变换$X_1(s)$，$X_2(s)$，…，$X_m(s)$之间有下列关系

$$Y_k(s)=G_{k1}(s)X_1(s)+G_{k2}(s)X_2(s)+\cdots+G_{km}(s)X_m(s)$$
$$k=1,2,\cdots,n.\tag{a}$$

这里应注意，我们在定义传递函数$G_{ki}(s)$时，只考虑了第i个输入量的作用，而其他输入量假设等于零。若用矩阵来表示(a)式，则输出向量的拉氏变换与输入向量的拉氏变换之间的关系可写成以下形式：

$$\begin{Bmatrix}Y_1(s)\\Y_2(s)\\\vdots\\Y_n(s)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}G_{11}(s)&G_{12}(s)\cdots&G_{1m}(s)\\G_{21}(s)&G_{22}(s)\cdots&G_{2m}(s)\\\vdots&\vdots&\vdots\\G_{n1}(s)&G_{n2}(s)\cdots&G_{nm}(s)\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}X_1(s)\\X_2(s)\\\vdots\\X_m(s)\end{Bmatrix},\tag{b}$$

或简写为

$$\{Y(s)\}=[G(s)]\{X(s)\},$$

式中 $\{Y(s)\}$ 是输出拉氏变换列矩阵；

$\{X(s)\}$ 是输入拉氏变换列矩阵。

$$[G(s)]=\begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s)\cdots & G_{1m}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s)\cdots & G_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{n1}(s) & G_{nm}(s)\cdots & G_{nm}(s) \end{bmatrix} \quad (c)$$

是多自由度系统的传递函数矩阵。其中的元素 $G_{ki}(s)$ 就是第 i 个输入量单独作用时，对系统第 k 个输出量之间的传递函数。因此，在求多自由度系统的单个传递函数时，应假定其他输入量为零。其步骤如下：

（a）分析力和运动，确定输出与输入参数。

（b）建立系统的微分方程组，依次保留一个输入而令其余输入为零。

（c）在全部初始条件为零的假设下，对每个微分方程两端取拉氏变换。

（d）解代数方程，求输出的拉氏变换。

（e）由输入、输出拉氏变换的比值确定传递函数。

（f）依次求出每一个传递函数，确定传递矩阵。

（g）用 $j\omega$ 代替 s，便可得到多自由度系统的频率响应矩阵。

例4.4 两激振力分别作用在图 29 示双质量弹簧系统的质量 m_1，m_2 上，已知 $m_1=m$，$m_2=2m$，$k_1=k_2=k$，$k_3=2k$，试求两质量的位移输出 $x_1(t)$、$x_2(t)$ 对应于激振力输入的传递函数。

已知：$m_1=m$，$m_2=2m$，$k_1=k_2=k$，$k_3=2k$。

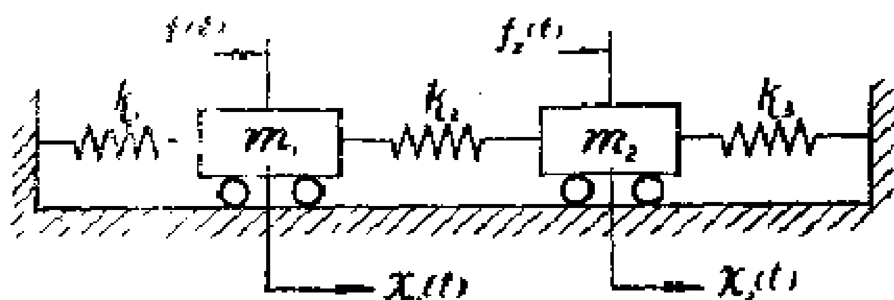


图 29

求：[G(s)]。

解： 根据牛顿运动定律，可直接写出系统强迫振动的运动微分方程式

$$m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = f_1(t),$$
$$m_2\ddot{x}_2 + (k_2 + k_3)x_2 - k_2x_1 = f_2(t).$$

代入已知条件得

$$\left.\begin{aligned} &m\ddot{x}_1 + 3kx_1 - kx_2 = f_1(t),\\ &2m\ddot{x}_2 + 3kx_2 - kx_1 = f_2(t).\end{aligned}\right\}\qquad (d)$$

为了求 $G_{11}(s)$、$G_{21}(s)$，在(d)式中令 $f_2(t)=0$，在零初始条件下对(a)式两端取拉氏变换，得

$$(ms^2 + 2k)X_1(s) - kX_2(s) = F_1(s),$$
$$-kX_1(s) + (2ms^2 + 3k)X_2(s) = 0$$

从此式解出

$$X_1(s) = \frac{(2ms^2 + 3k)F_1(s)}{(ms^2 + 2k)(2ms^2 + 3k) - k^2}$$

$$= \frac{(2ms^2 + 3k)F_1(s)}{2m^2s^4 + 7mks^2 + 5k^2},$$

$$X_2(s) = \frac{kF_1(s)}{2m^2s^4 + 7mks^2 + 5k^2}.$$

由此可得

$$G_{11}(s)=\frac{X_1(s)}{F_1(s)}=\frac{2ms^2+3k}{2m^2s^4+7mks^2+5k^2},$$

$$G_{12}(s)=\frac{X_2(s)}{F_1(s)}=\frac{k}{2m^2s^4+7mks^2+5k^2}. \quad (e)$$

为了求 $G_{12}(s)$、$G_{22}(s)$ 在(d)式中令 $f_1(t)=0$，在零初始条件下对(d)式两端取拉氏变换得

$$(ms^2+2k)X_1(s)-kX_2(s)=0,$$

$$-kX_2(s)+(2ms^2+3k)X_2(s)=F_2(s).$$

从此式可求出

$$G_{12}(s)=\frac{X_1(s)}{F_2(s)}=\frac{k}{2m^2s^4+7mks^2+5k^2},$$

$$G_{22}(s)=\frac{X_2(s)}{F_2(s)}=\frac{ms^2+2k}{2m^2s^4+7mks^2+5k^2}. \quad (f)$$

由(f)、(e)两式可写出系统的传递函数矩阵

$$[G(s)]=\begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix}$$

$$=\frac{\begin{bmatrix} 2ms^2+3k & k \\ k & ms^2+2k \end{bmatrix}}{2m^2s^4+7mks^2+5k^2}.$$

§4.4 多自由度系统响应的计算

对于一个确定的多自由度线性系统，当求出它的频率响应矩阵$H(\omega)$和脉冲响应矩阵 $h(\tau)$后，便可用矩阵方程(4.18)、(4.8)来求出此多自由度系统的响应。其步骤如下：

(1) 分析力和运动，建立运动微分方程式。

(2) 确定系统的频率响应矩阵或脉冲响应矩阵。

(3)用式(4.18)、(4.8)计算系统的输出响应矩阵。

当输入 $x_l(t)$ 是周期函数时，则应将它展成谐波形式的富氏级数。

$$x_l(t)=\sum_{l=1}^{\infty}A_{l\epsilon}(t)\sin(l\omega t+\varphi_\epsilon),$$

进一步再写成复数形式

$$x_{c1}(t)=\sum_{l=1}^{\infty}A_{ll}[\cos(l\omega t+\varphi_l)+j\sin(l\omega t+\varphi_l)]$$

$$\sum_{l=1}^{\infty}A_{ll}e^{j(l\omega t+\varphi_l)}。\qquad(4.19)$$

并规定(4.19)式的虚数部份是系统真实输入 $x(t)$ 的富氏级数展开式，再次应用线性系统的迭加原理，即可得到输出的复数表达式

$$\begin{Bmatrix}y_{c1}\\y_{c2}\\\vdots\\y_{cn}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}H_{11}(\omega)&H_{12}(\omega)\cdots&H_{1m}(\omega)\\H_{21}(\omega)&H_{22}(\omega)\cdots&H_{2m}(\omega)\\\vdots&\vdots&\vdots\\H_{n1}(\omega)&H_{n2}(\omega)\cdots&H_{nm}(\omega)\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}x_{c1}\\x_{c2}\\\vdots\\x_{cm}\end{Bmatrix}。\qquad(4.20)$$

它的虚部就是所求的输出响应。

解周期输入多自由度响应的步骤如下：

(1) 分析运动和力，建立系统的运动微分方程式。

(2) 确定系统的频率响应矩阵。

(3) 将输入 $[x_i(t)]$ 展开成谐谐形式的富氏级数，并进一步化为规定的复数形式。

(4) 按式(4.20)计算输出的复数形式的解。

（5）取出复数形式输出的虚部，确定系统的输出响应。

例4.5 图30所示为一种双质量不平衡式振动输送机的结构简图。它由电动机8带动偏心轴5，通过激振弹簧4激起上槽体1沿着与水平线成B角的方向振动从而把槽体上输送的物料抛掷起来向前传送。在分析振动输送机运动时，可用图(b)的双质量系统来表示，上槽体1简化为质量m_2，板簧2，蓄能弹簧3及激振弹簧4按并联弹簧简化为等效刚度是k_2的弹簧。下槽体6为质量m_1，减振弹簧7刚度为k_1。在两个质量上分别作用有两个大小相等方向相反的激振力$F_0 \sin\omega t$。

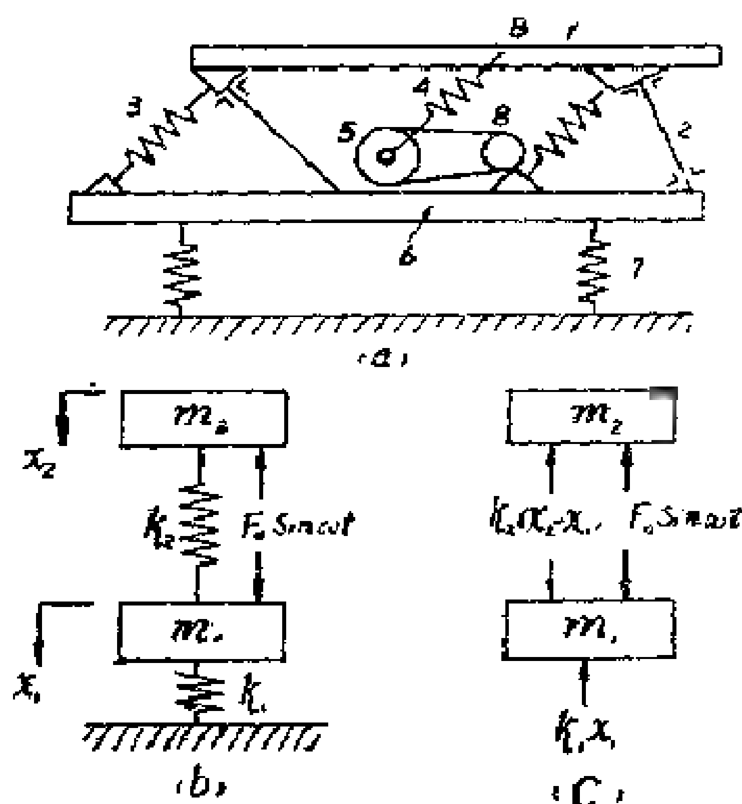


图 30

已知：$\overline{W} = m_1 g = 1421 kg$，　　$W_2 = m_2 g = 407 kg$，

$k_1 = 1760\ kg/cm$，　　$k_2 = 3280\ kg/cm$，

$F_0 = 1680\ kg$，　　$\omega = 11.[illegible]\ 1/s$。

求：$x_1(t)$、$x_2(t)$的振幅。

解：根据图 30(c)所示的受力情况，可列出系统的运动微分方程如下：

$$m_1\ddot{x}_1 = k_2(x_2 - x_1) - k_1x_1 + F_0\sin\omega t,$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) - F_0\sin\omega t;$$

或

$$m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = F_0\sin\omega t = F_1,$$

$$m_2\ddot{x}_2 + k_2x_2 - k_2x_1 = -F_0\sin\omega t = F_2. \qquad (a)$$

为了求x_1、x_2对应于输入的频率响应特性，应在(a)式中令

$$F_1 = e^{j\omega t}, \qquad F_2 = 0,$$

$$x_1 = H_{11}(\omega)e^{j\omega t}, \qquad x_2 = H_{21}(\omega)e^{j\omega t}. \qquad (b)$$

将它们及其二阶导数代入(a)，消去公因子 $e^{j\omega t}$ 得

$$(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)H_{11}(\omega) - k_2H_{21}(\omega) = 1,$$

$$-k_2H_{11}(\omega) + (k_2 - m_2\omega^2)H_{21}(\omega) = 0. \qquad (c)$$

由此可解得

$$H_{11}(\omega) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -k_2 \\ 0 & k_2 - m_2\omega^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (k_1 + k_2 - m_1\omega^2) & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2\omega^2 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{k_2 - m_2\omega^2}{m_1m_2\omega^4 - [(k_1 + k_2)m_2 + k_2m_1]\omega^2 + k_2^2}, \qquad (d)$$

$$H_{21}(\omega) = \frac{k_2}{m_1m_2\omega^4 - [(k_1 + k_2)m_2 + k_2m_1]\omega^2 - k_2^2} \qquad (e)$$

设 $\quad F_1 = 0, \qquad F_2 = e^{j\omega t},$

$$x_1(t) = H_{12}(\omega)e^{j\omega t}, \quad x_2(t) = H_{22}(\omega)e^{j\omega t},$$

代入(a)式后同样可以求得

$$H_{12}(\omega) = \frac{k_2}{m_1 m_1 \omega^4 - [(k_1+k_2)m_2 + k_2 m_1]\omega^2 - k_2^2}, \tag{f}$$

$$H_{22}(\omega) = \frac{k_1 + k_2 - m_1\omega^2}{m_1 m_2 \omega^4 - [(k_1+k_2)m_1 + k_2 m_1]\omega^2 - k_2^2}. \tag{g}$$

由式(d)、(e)、(f)、(g)可写出系统的频率响应矩阵

$$H(\omega) = \begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} k_2 - m_2\omega^2 & k_2 \\ k_2 & k_1 + k_2 - m_1\omega^2 \end{bmatrix}}{m_1 m_2 \omega^4 - [(k_1+k_2)m_2 + k_2 m_1]\omega^2 - k_2^2}. \tag{h}$$

将式(h)和作用在系统上的输入列阵

$$[F] = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \sin\omega t \\ -F_0 \sin\omega t \end{bmatrix},$$

代入式(4.20)，求系统的输出列阵

$$[x] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [H(\omega)][F]$$

$$= \begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0 \sin\omega t \\ -F_0 \sin\omega t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} H_{11}(\omega)F_0 \sin\omega t - H_{12}(\omega)F_0 \sin\omega t \\ H_{21}(\omega)F_0 \sin\omega t - H_{22}(\omega)F_0 \sin\omega t \end{bmatrix}$$

$$
=\frac{\begin{Bmatrix}(k_2-m_2\omega^2-k_2)F_0\sin\omega t\\ [k_2-(k_1+k_2-m_1\omega^2)]F_0\sin\omega t\end{Bmatrix}}{m_1m_2\omega^4-[(k_1+k_2)m_2+k_2m_1]\omega^2-k_2^2}
$$

$$
=\frac{\begin{Bmatrix}-m_2\omega^2F_0\sin\omega t\\ (m_1\omega^2-k_1)F_0\sin\omega t\end{Bmatrix}}{m_1m_2\omega^4-[(k_1+k_2)m_2+k_2m_1]\omega^2-k_2^2}
$$

由此可求出两质量 m_1 和 m_2 的振幅

$$
B_1=\left|\frac{-m_2\omega^2F_0}{m_1m_2\omega^4-[(k_1+k_2)m_2+k_2m_1]\omega^2-k_2^2}\right|
$$

$$
=0.259(cm)
$$

$$
B_2=\left|\frac{(m_1\omega^2-k_1)F_0}{m_1m_2\omega^4-[(k_1+k_2)m_2+k_2m_1]\omega^2-k_2^2}\right|
$$

$$
=0.681(cm)
$$

习 题 四

4—1 顶面和底面被水平弹簧约束的刚性杆 AB，竖直地支于滚轮支座 A 上，设在质心 C 处有激振力 F_c 和扭力矩 M_c 的作用。若采用质心的微小位移 x_c 和绕质心的转角 θ_c 作为系统的输出。试求系统的频率响应矩阵和脉冲响应矩阵。已知 $k_1=k_2=k$，杆的长度 l 和质量 m（图4.1）。

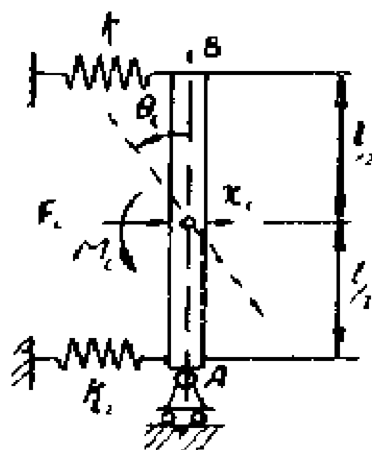


图 4·1

4—2　单位长度质量为ρ的刚性杆，在其末端固定有质量为m的重球，此杆用刚度为k_1和k_2的弹簧支持在水平位置，若选A点的铅垂座标x_a和绕A点的转角θ_a为广义座标来表示系统的位移输出，当在B点上有铅垂激振力$F(t)$作用的情况下，试求微小振动时系统的动态特性。已知$k_1=k_2=k$和杆的质量$l\rho=2m$(图4.2)。

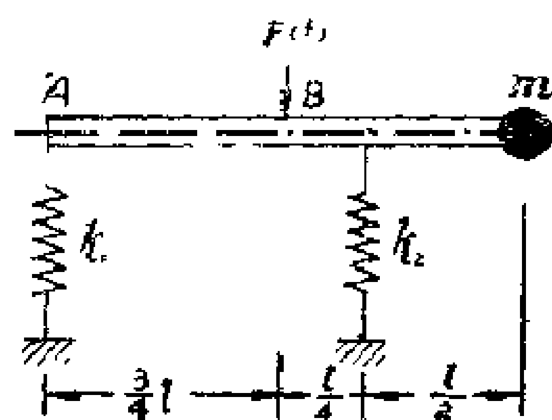


图 4·2

4—3　图4.3是弹性地基上刚性建筑的模型。质量为M的刚体支承于水平弹簧和扭转弹簧上，它可以沿水平方向左右移动，并在铅垂面内发生摇摆。设水平弹簧的刚度为k_1，扭转弹簧的刚度为k_2，刚体重心到支点的距离为l，刚体绕重心的回转半径为ρ，选支点o的水平位移$x(t)$与刚体在铅垂面内的摆角θ为广义座标，当地基作水平振动$y(t)=a\sin\omega t$时，求刚体的运动响应(设摆角θ较小)。

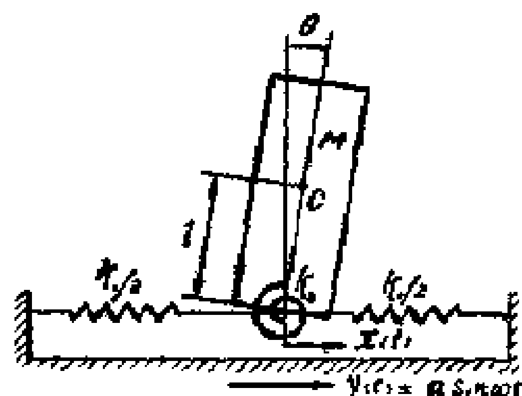
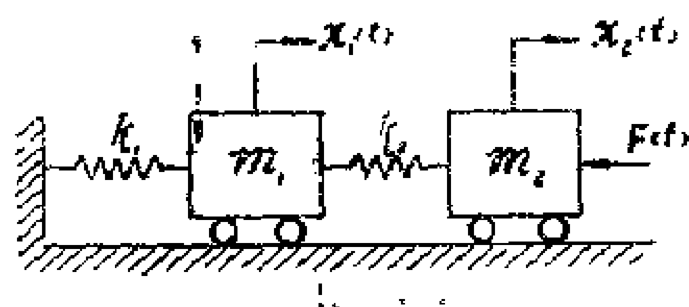


图 4·3

4—4　已知$m_1=2m_2$，$k_1=2k_2$，试求图4.4所示系统对于力输入$F(t)$和两个位移输出$x_1(t)$，$x_2(t)$



的频率响应矩阵和脉冲响应矩阵。

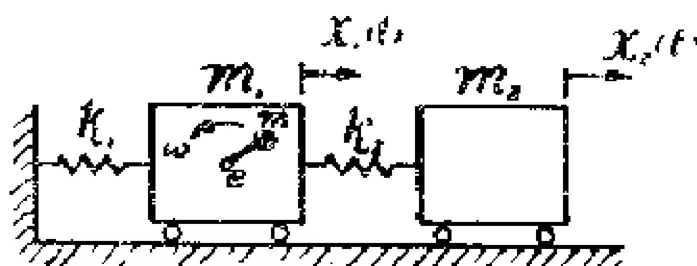


图 4.5

4—5 在图4.5所示小车中，有偏心距为 e 的偏心质量 m 以等角速 ω 转动。试求两个小车的稳态强迫振动。已知 $k_1=2k_2=k$，$m_1=2m_2=2m$，m、e、ω。

4—6 试求图4.6所示半正定系统的运动规律 $x_1(t)$、$x_2(t)$，其中 $\delta(t)$ 是单位冲量，假设起始条件为零，已知 m_1、m_2、k。

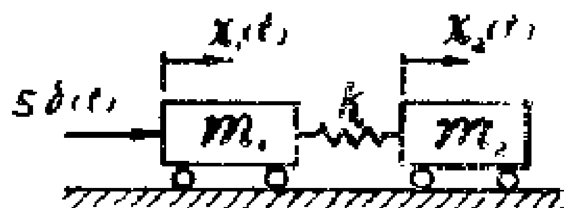


图 4.6

4—7 图4.7所示无质量小车用弹簧与粘性阻尼器连接在两个结点上，假设两结点的位移 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 是系统的运动输入，而把小车的位移 $y(t)$ 作为输出，试求系统的频率响应函数和脉冲响应函数。

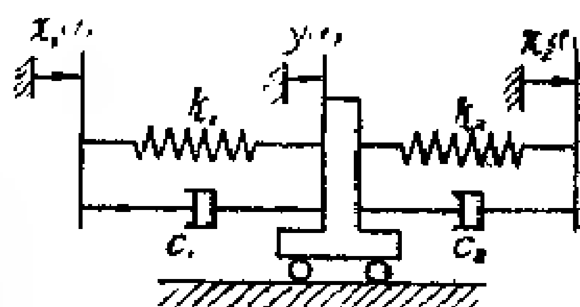


图 4.7

4—8 在图4.8所示的二自由度系统中，输入是力 $F_1(t)$ 和 $F_2(t)$，输出是两质

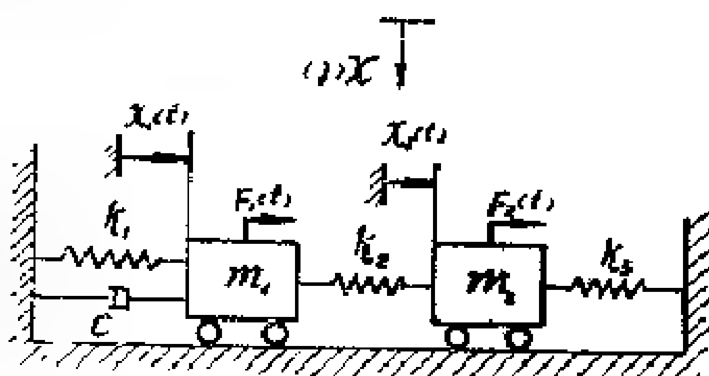


图 4.8

量的位移，试求系统的动态特性。

已知 c、$k_1=k_2=k_3=k$，$m_1=m_2=m$。

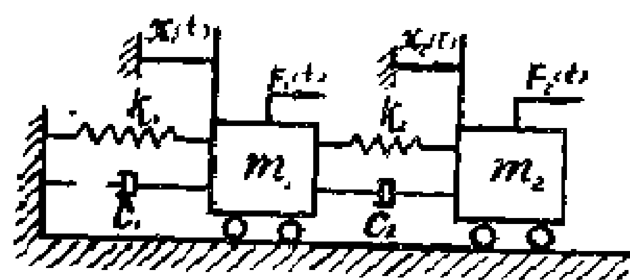


图 4·9

4—9 在图 4.9 所示系统中，设输入是力 $F_1(t)$ 和 $F_2(t)$，输出是位移 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$，求系统的动态特性。已知 $k_1=k_2$，$m_1=m_2$，$c_1=c_2$。

4—10 试求图4.10所示系统在激振力 $F(t)$ 作用下，对应于输出 $x(t)$ 和 $\theta(t)$ 的动态特性。设摆作微幅振动，已知 $m=10Kg$，$M=20Kg$，$l=1m$，$k_1=k_2=1000N/m$。

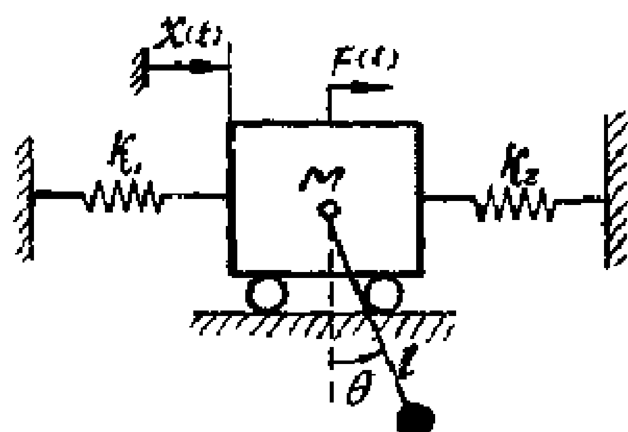


图 4·10

4—11 在图4.11所示的系统中 $F_1(t)$，$F_2(t)$ 是两个输入的激振力，系统的输出是两质量的位移 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$，已知 m，k，试求系统的频率响应矩阵和脉冲响应矩阵。

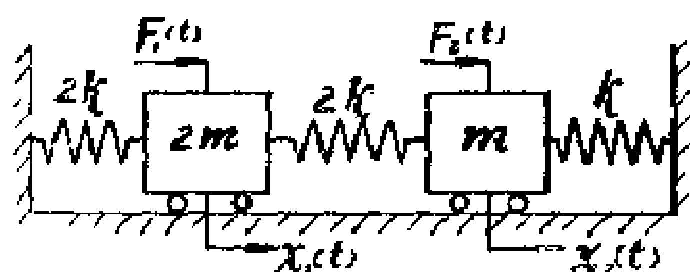


图 4·11

4—12 带有弹簧约束的双摆如图4.12所示，若采用两质量的微小水平位移 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 作

为输出，而将两个作用在质量上的水平力 F_1 和 F_2 作为输入。试求在微小摆动的条件下系统的频率响应矩阵，已知 $m_1 = m_2$，k_1、k_2，$l_1 = l_2$。

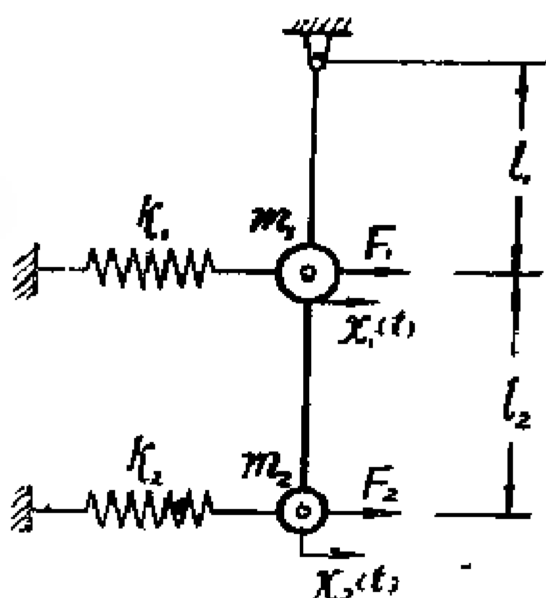


图 4·12

4—13 图4.13所示系统受激振力 $F(t)$ 作用而产生微小振动。求对于斜面的绝对位移 $x(t)$ 和重物相对位移 $z(t)$ 的频率响应矩阵，已知 M、m、k_1、k_2。

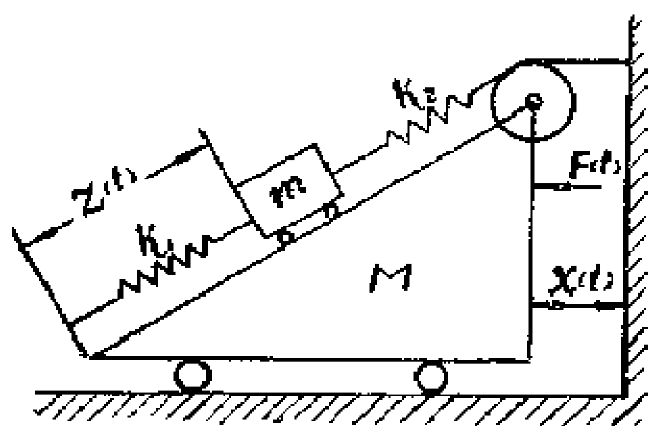


图 4·13

4—14 质量相等，长度相同的两根均质杆彼此用铰链相联，由刚性系数相同的三根弹簧支持在水平位置，如图4.14所示。若两外激振力 F_1、F_2 作用在两杆的重心上，而使 B 点产生铅垂振动和两杆绕 B 点摆动，已知 l、m、k，试求系统的频率响应函数矩阵。

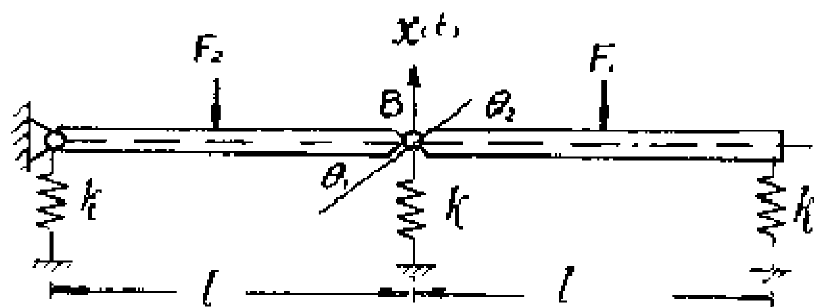


图 4·14

4—15 一个如图 4.15(b)所示的激振力作用在平台 M，

上，试确定平台的稳态响应。已知 $M_1=\frac{3}{\pi}kg$， $M_2=\frac{1}{\pi}kg$，

$K=\frac{1}{\pi}N/m$， $c=2N\cdot s/m$。

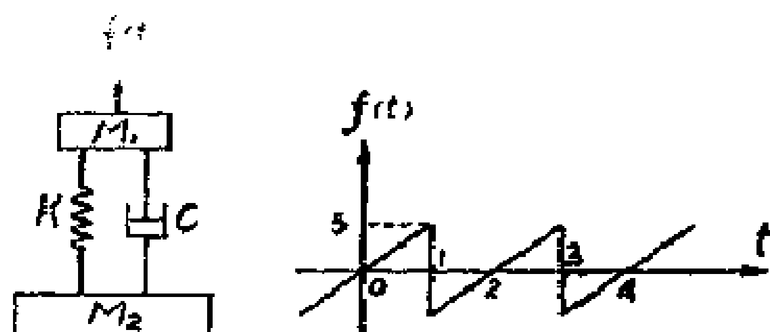
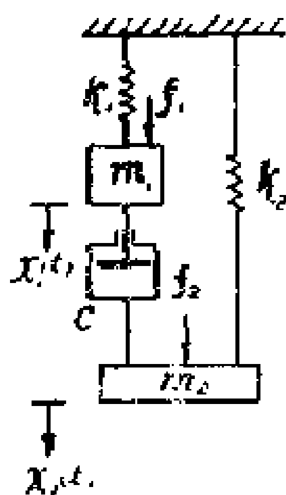


图 4-15

4—16 假设图4.16所示机械系统的输入是作用在两质量上的激振力 $f_1(t)$、$f_2(t)$，输出是两质量的振动位移 $x_1(t)$，$x_2(t)$。已知 k_1、k_2、c、m_1、m_2，试求系统的频率响应函数和传递函数。



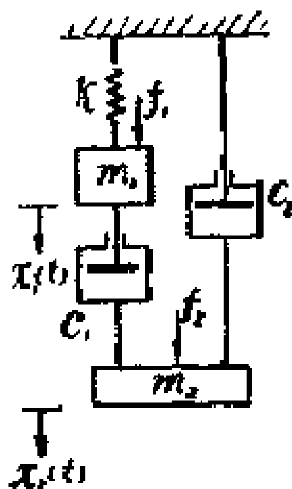


图 4-16　　　　图 4-17

4—17 设图4.17所示系统的输入是 $f_1(t)$和 $f_2(t)$，输出是 $x_1(t)$和 $x_2(t)$，已知 m_1、m_2、k、c_1、c_2，求系统的频率

响应函数和传递函数。

4—18 两个质量 m_1 和 m_2 被悬挂在振动的壳体内。已知 $m_1=2m_2=2m$，$k_1=2k_2=2k$，当壳体按正弦规律 $y=a\sin\omega t$ 振动时，试求两质量相对于壳体的运动规律。

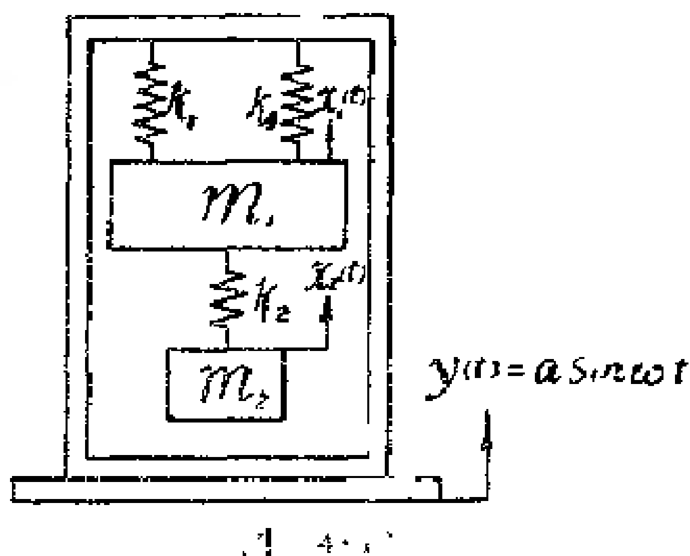


图 4-18

4—19 在图 4.19所示的机械系统中，已知三个物体的质量 m_1、m_2、m_3，弹簧的刚度 k_1、k_2、k_3 和阻尼系数 c_1、c_2 若系统的输入是下平台 m_3 的位移 $y(t)$，输出是质量 m_1、m_2 的平动位移 $x_1(t)$、$x_2(t)$。试求系统的传递函数。

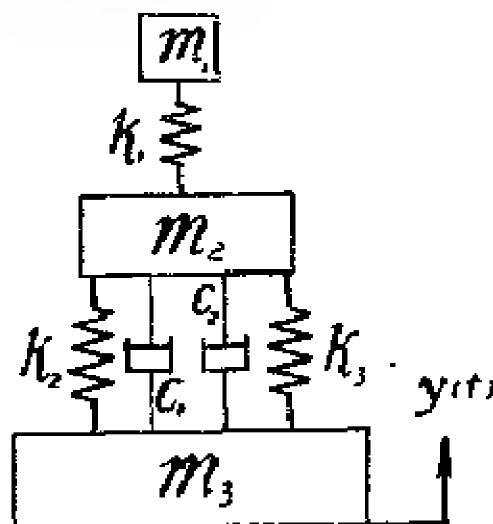


图 4-19

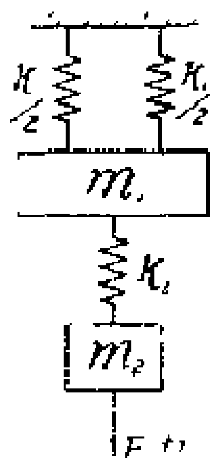


图 4-20

4—20 设图 4.20 所示机械系统的输入量是作用于 m_2 上的力 $F(t)$，输出量分别是质量 m_1 的位移 $x_1(t)$和质量 m_2 的

位移 $x_2(t)$。已知质量 $m_1=2m_2$，刚度 $k_1=2k_2$，试求系统的频率响应函数和脉冲响应函数。

4—21 在图4.21所示的扭振系统中，设转矩M是输入，两个圆盘的转角是输出。已知两轴段的扭转刚度 $k_1=2k_2$ 及两圆盘的转动惯量 $J_1=2J_2$，试求频率响应函数和脉冲响应函数。

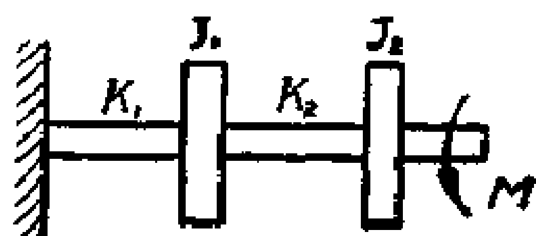


图 4·21

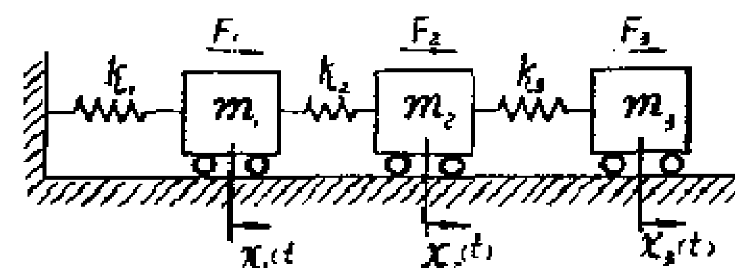


图 4·22

4—22 图4.22所示三个质量用三个弹簧连接起来，在激振力 F_1、F_2、F_3 作用下沿 x 轴振动。试求对应于质量的位移输出 $x_1(t)$、$x_2(t)$、$x_3(t)$的频率响应矩阵。已知 $m_1=m_2=m_3=m$、$k_1=k_2=k_3=k$。

4—23 在图4.23所示的系统中已知 $k_1=k_2=k$，$m_1=m_2=m_3=m$，若输入是作用在第二个质量上的激振力 $F(t)$，输出是三个质量的水平直线位移，试求系统的频率响应矩阵和脉冲响应矩阵。

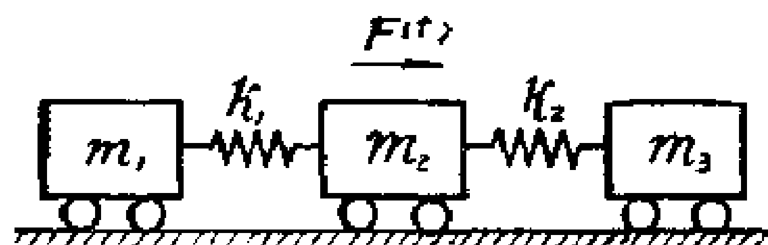


图 4·23

4—24 图4.24是用三个弹簧与三个质量互相联接起来的机械系统，位移坐标$x_1(t)$、$x_2(t)$、$x_3(t)$可确定这三个自由度系统的运动，已知：$m_1=m_2=m_3$，$k_1=k_2=k_3$，作用在质量 m_3 上的干扰力$F(t)=F_0\sin\omega t$，试求系统的运动规

律.

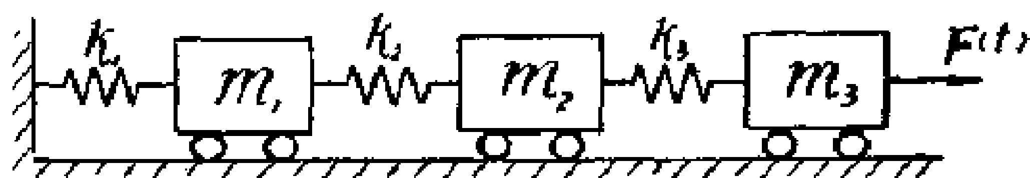


图 4·24

4－25 设 $f(t)$ 是图4.25所示系统的输入，三个小车的位移 $x_1(t)$、$x_2(t)$、$x_3(t)$ 是系统的输出．已知 k、c、m，试求系统的频率响应函数和传递函数。

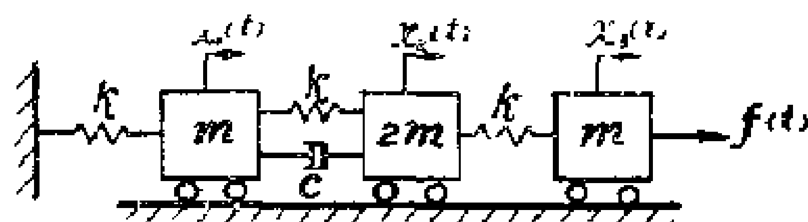


图 4·25

4—26 在图4.26所示的振动系统中，假设有一阶跃激振力 $F(t)=F_0$ 作用在第一个质量上，系统开始处于静止，试求两质量的位移输出响应。已知 k、m、F_0。



图 4·26

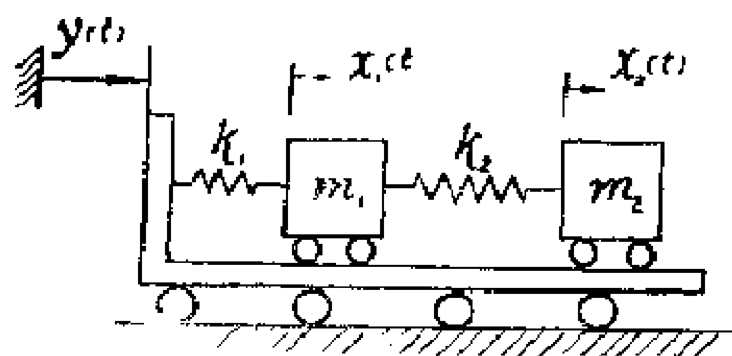


图 4·27

4—27 在图4.27所示的振动系统中，假定支承基础沿水平方向作简谐运动，即 $y=a\sin\omega t$，已知 $m_1=m_2=m$，$k_1=k_2=k$，试求两小车相对于支承的运动规律。

4—28 图4.28中各质量只能在铅垂方向运动。当质量$4m$上作用有铅垂力$P_0\cos\omega t$时，试求各质量的稳态强迫振动。

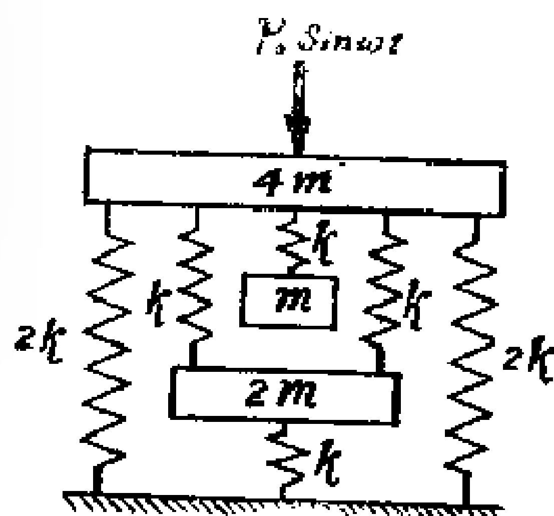
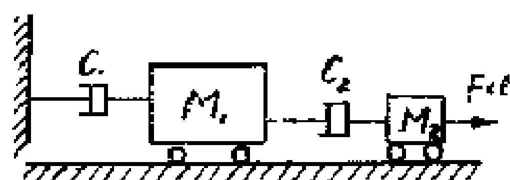


图 4.28

4—29 一个随时间按三角形变化的力，加在图4.29所示系统的质量M_2上，试求m_1的运动状态。已知两个小车的重量分别为$M_1g=46N$，$M_2g=23N$，$c_1=0.15N\cdot s/cm$，$c_2=0.45N\cdot s/cm$。



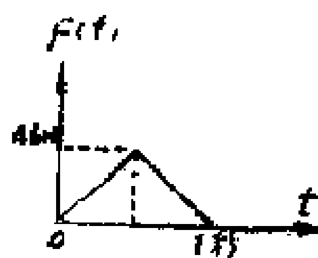


图 4.29

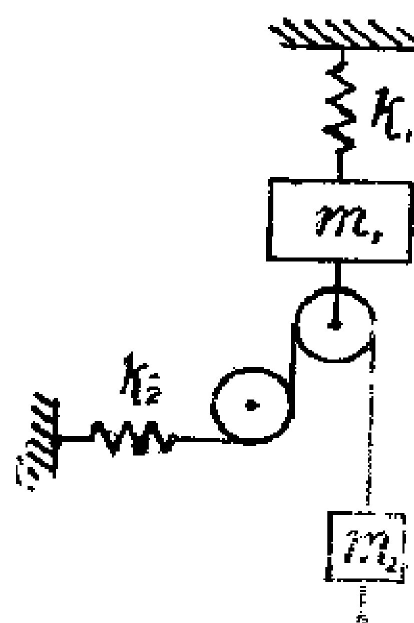


图 4.30

4—30 在图4.30所示的振动系统中，已知弹簧的刚度$k_1=5k_2=5k$，两重物的质量$m_1=2m_2=2m$，若不计两滑轮的质量，试求在干扰力F(t)作用下，两重物位移所对应的频率响应曲线和脉冲响应函数。

4—31 在图4.31所示的系统中，已知$k_1=k_2=k_3=k$，$m_1=m_2=m$，$r_1=r_2=r$，

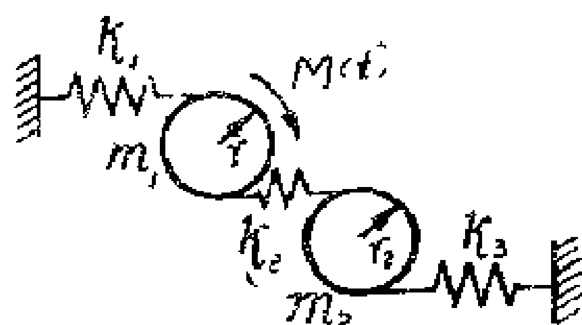


图 4·31

试求在力矩$M(t)$作用下对应于两圆盘转角输出的频率响应函数和冲激响应函数。

4—32 图4·32表示质量为m半径为r的两个相同圆柱体，它们之间用刚度为k_1的弹簧相联，右边的圆柱体又用刚度为k_2的弹簧与固定面相联。设圆柱体在水平面上只滚动不

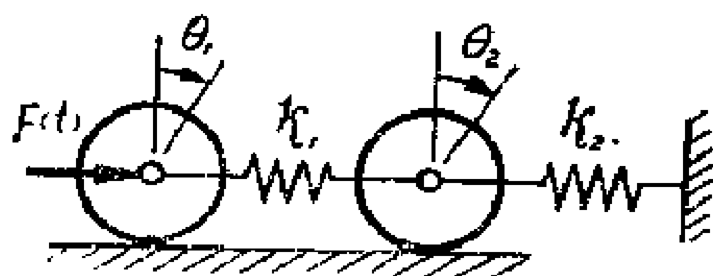


图 4·32

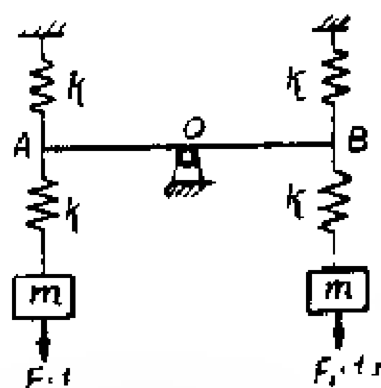


图 4·33

滑动。已知$k_1=2k$，$k_2=3k$，以及作用在左侧圆柱体中心上的干扰力$\mathbf{F}(t)$，试求两圆柱体转角输出的频率响应函数和脉冲响应函数。

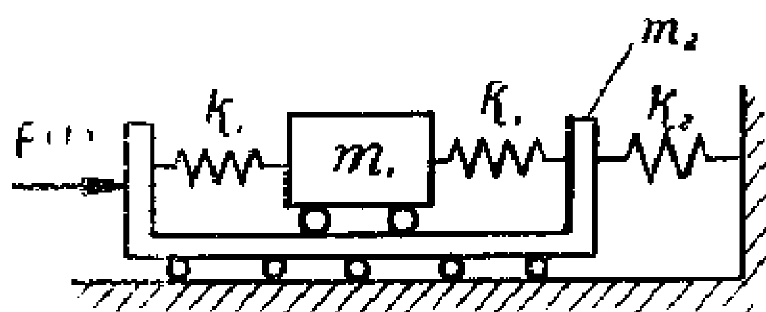


图 4·34

4—33 在图4·33中，AB是可绕中点O转动的无质刚杆。两个干扰力$\mathbf{F}_1(t)$、$\mathbf{F}_2(t)$分别作用在两个质量相同的物

体上。已知m，k，试求两质量位移所对应的频率响应函数和脉冲响应函数。

4—34　质量m_1用刚度为k_1的弹簧与质量为m_2的小车相联，小车又用弹簧k_2与固定壁相联，已知$k_2=4k_1=4k$，$m_2=2m_1=4m$，若干扰力$F(t)$作用在小车上，试求系统的位移所对应的频率响应函数和脉冲响应函数。

第 五 章

概率分布函数和概率密度函数

内 容 提 要

§5.1 概率分布函数

随机变量$X(t_1)$不大于某个特定的x值，这一事件的概率$P_r[X(t_1)\leqslant x]$，应该是x的函数，即

$$P(x,t_1)=P_r[X(t_1)\leqslant x]。\tag{5.1}$$

此函数称为分布函数，它能表示随机变量的基本统计特性，对于定常过程来说其统计特性与时间无关，因而其概率分布函数也与时间无关，即有

$$P(x,t_1)=P(x)。$$

概率分布函数具有如下几条性质：

(a) $P(x)$是非减函数；

(b) $P(-\infty)=0$，$P(\infty)=1$；　　(5.2)

(c) $0\leqslant P(x)\leqslant 1$。

遍历过程的概率分布函数可从单个样本按如下公式确定：

$$P(x)=\lim_{T\to\infty}\frac{\Sigma\Delta t_i}{T},\tag{5.3}$$

式中，T ——表示样本总长度，

$\Delta t_1,\Delta t_2,\cdots$ 是$x(t)$的幅值小于x所对应的各个时间区间，如图31所示。

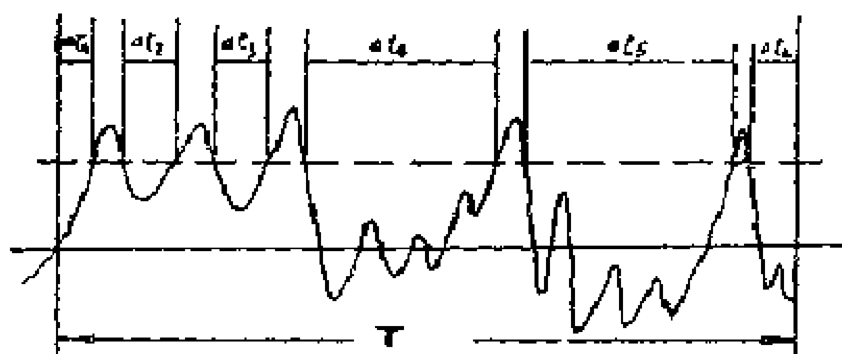


图 31

§5.2 概率密度函数

概率分布函数的导数称为概率密度函数

$$p(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x+\Delta x)-P(x)}{\Delta x}$$

$$=\frac{dP(x)}{dx}. \qquad (5.4)$$

它表示随机变量落在单位幅值区内的概率，它具有以下几条性质：

(a) $p(x)$是非负函数；

(b) $p(-\infty)=0$， $p(\infty)=0$；

(c) $P(x)=\int_{-\infty}^{x}p(x)dx$； (5.5)

(d) $\int_{-\infty}^{\infty}p(x)dx=1$.

§5.3 正态分布

如果随机变量X(t)具有如下的概率密度函数

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (5.6)$$

则称$X(t)$服从数字特征为μ，σ的正态分布。其中μ，σ为两个大于零的常数，它们分别表示随机变量的均值和标准差。（见§6.1，§6.3）

§5.4 联合概率分布和概率密度函数

设$X(t_1)$和$X(t_2)$是两个随机变量，我们用$X(t_1)$不大于x_1和$X(t_2)$不大于x_2的联合概率来定义随机过程X于时刻t_1和t_2的二维联合概率分布函数

即令 $$P(x_1,t_1;\ x_2,t_2)\equiv P_r[X(t_1)\leqslant x_1, X(t_2)\leqslant x_2].$$

它具有下列几条性质：

(a) $P(x_1,\ t_1;\ -\infty,\ t_2)=P(-\infty,\ t_1;\ x_2,\ t_2)$
$=P(-\infty,\ t_1;\ -\infty,\ t_2)=0$；

(b) $P(\infty,\ t_1;\ \infty,\ t_2)=1$；

(c) $P(x_1,\ t_1;\ \infty,\ t_2)=P(x_1,\ t_1)$； (5.7)

(d) $P(\infty,\ t_1;\ x_2,\ t_2)=P(x_2,\ t_2)$。

二维联合概率分布函数的二阶混合偏导数称为二维概率密度，即：

$$p(x_1,t_1;\ x_2,t_2)=\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}P(x_1,t_1;\ x_2,t_2), \qquad (5.8)$$

它具有如下的两点性质：

(a) $p(x_1,\ t_1;\ x_2,\ t_2)\geqslant 0$；

(b) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}p(x_1,t_1;\ x_2,t_2)dx_1dx_2=1$。 (5.9)

在一般情况下，联合概率分布或概率密度很难用数学公

式来表示，但实际上最重要的二维正态分布的概率密度却能用如下的公式表示：

$$p(x,y)=\frac{\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho_{xy}^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2-2\rho_{xy}\frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y}+\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]\right\}}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2}} \tag{5-30}$$

式中μ_x，μ_y——两随机变量X和Y的均值；

σ_x，σ_y——两随机变量X和Y的标准差；

$\rho_{xy}=\frac{C_{xy}(\tau)}{\sigma_x\sigma_y}$——两随机变量的规范化互协方差，或相关系数，其变化区为$-1\leqslant\rho_{xy}\leqslant1$。

$C_{xy}(\tau)=E[(x-\mu_x)(y-\mu_y)]$——互协方差。

当$\rho_{xy}=0$时，两随机变量不相关，彼此独立，其正态分布的概率密度是

$$p(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}e^{-\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}}=p(x)\cdot p(y),$$

式中：$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}}$——是随机变量

X 的正态分布密度；

$$p(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y}e^{-\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}}$$ —— 是随机变量

Y 的正态分布密度。

§5.5 各态历经过程概率分布和概率密度函数的计算

本节中出现的概率分布和概率密度问题有以下两种类型：

（1） 利用概率分布和概率密度函数的性质及它们间的微积分关系求解的问题。

（2） 确定随机变量的概率分布和概率密度的问题。

只要正确应用公式(5.1)—(5.5)不难求得第一类问题的解答，但第二类问题却没有一种固定的解法，只有按照具体问题去求解。而且除某些特殊情况外，确定 $P(x)$ 和 $p(x)$ 都比较困难。但是在随机振动中经常遇见的正态过程和某些各态历经过程，却可以用一定的程序来计算概率分布和概率密度。

对于正态过程，只要用第六章的方法求出均值 μ_x，方差 σ^2 和相关系数 ρ_{xy} 后，就可确定分布函数和密度函数。因此下面介绍各态历经过程确定分布函数和密度函数的步骤：

（a） 在样本曲线上，划一根平行于 x 轴的水平线，或相距 dx 的两条平行于 x 轴的水平线。

（b） 用几何关系或微分关系求出 $x(t)$ 的幅值在此水平线下的时间区间。

（c） 应用公式(5.3)计算概率分布函数。

（d） 微分求概率密度函数。

若能根据题设条件确定概率密度时，便可用积分求出概率分布函数。

例5.1 确定图32所示三角波的概率分布函数和概率密度函数。

已知：A，T。

求：$P(x)$，$p(x)$。

解：因为随机变量的值总是小于A和大于零，则

$x>A$时

$P(x)=1$，

$p(x)=0$，

$x<0$时

$P(x)=0$，

$p(x)=0$。

在区间$0<x<A$内

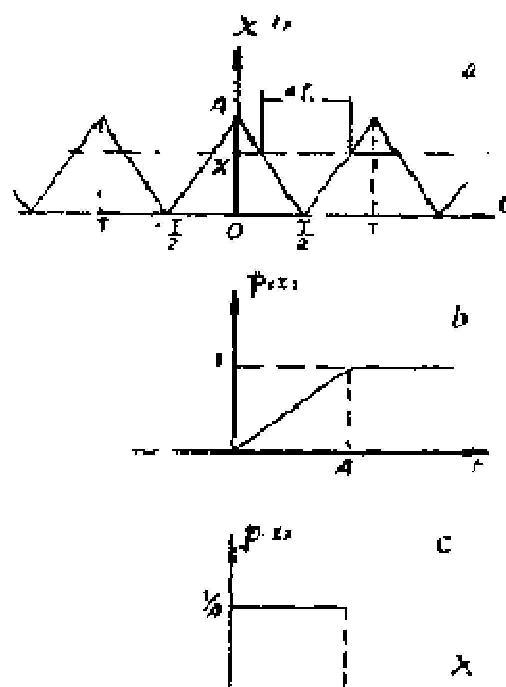


图 32

从图32(a)的几何关系可以求出在每个周期中随机变量$X(t)$小于特定值x的时间间隔均为

$$\Delta t_i=\frac{x}{A}T.$$

若取n个周期来计算平均值，当$n\to\infty$时，则可由(5.3)式求得概率分布函数。

$$P(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\Delta t_i}{nT}=\frac{\Delta t_i}{T}=\frac{x}{A},$$

则 $$p(x)=\frac{dP(x)}{dx}=\frac{1}{A}.$$

由此可画出图32(b)，(c)所示的概率分布和概率密度曲线。

例5.2 把初位相随机变化的正弦波函数

$$X=\{X_k\}=\{A\sin(\omega t+\varphi_k)\}$$

看作一个遍历过程。试求它的概率密度函数。

已知 A，ω

$$X=\{X_k\}=\{A\sin(\omega t+\varphi_k)\}$$

求：$p(x)$。

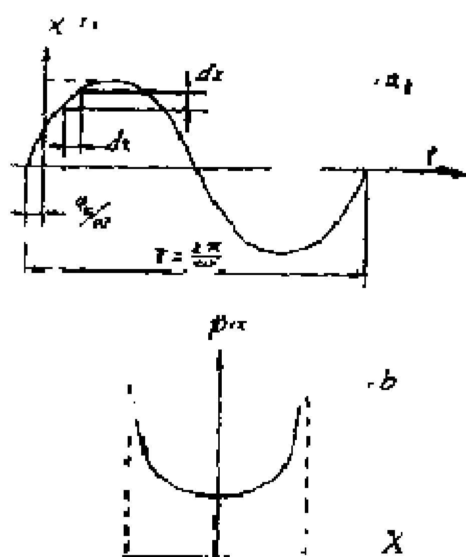


图 33

解： 考虑到上述正弦波取值不能超出$(-A, A)$故有
$p(x)=0$，$|x|>A$；由图可以看出在区间$(-A, A)$内，$x(t)$取值于$(x, x+dx)$的概率等于

$$P_r[x<X<x+dx]=p(x)dx=2dt/T \qquad (a)$$

由
$$x=A\sin(\omega t+\varphi) \qquad (b)$$

微分求得 $dx=A\omega\cos(\omega t+\varphi)dt=\omega(A^2-x^2)^{\frac{1}{2}}dt \quad (c)$

由此解得
$$dt=\frac{dx}{\omega(A^2-x^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (d)$$

代入(a)式
$$p(x)dx=2\cdot\frac{dx}{\omega(A^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{T},$$

得
$$p(x)=2\cdot\frac{\omega}{2\pi}\cdot\frac{1}{\omega(A^2-x^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (e)$$

$$=\frac{1}{\pi}(A^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}, \qquad (\text{当}|x|<A)$$

于是相位随机变化正弦波的概率密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}(A^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}, & 当\ |x|<A,\\ 0, & 当\ |x|>A.\end{cases}$$

由此式画出的概率密度函数曲线如图33(b)。

§5.6 随机变量函数的分布

在实际中我们所关心的随机变量往往是已知分布的一些随机变量的函数。根据它们之间的函数关系，便可由已知分布的随机变量求出随机变量函数的分布。

一、一元随机变量函数的分布 设随机变量X和Y的函数关系为$y=\varphi(x)$，且有连续的一阶导数$y'=\varphi'(x)=\dfrac{d\varphi(x)}{dx}$，对于某一个给定的$y$能由方程

$$y=\varphi(x) \tag{5.11}$$

求出n个实根$x_1, x_2, \cdots, x_n$，即

$$y=\varphi(x_1)=\varphi(x_2)=\cdots=\varphi(x_n),$$

则可由随机变量X的概率密度$p_x(x)$按如下公式确定随机变量函数Y的概率密度：

$$p_y(y)=\frac{p_x(x_1)}{|\varphi'(x_1)|}+\frac{p_x(x_2)}{|\varphi'(x_2)|}+\cdots+\frac{p_x(x_n)}{|\varphi'(x_n)|} \tag{5.12}$$

如果方程(5.11)没有实根，则$p_y(y)=0$。

当$Y=aX+b$时

$$y=ax+b,\ x=\frac{y-b}{a},\ \varphi'(x)=y'=a.$$

则
$$p_y(y)=\frac{p_x(x)}{|\varphi'(x)|}=\frac{1}{|a|}p_x\left(\frac{y-b}{a}\right), \tag{5.13}$$

其中 a，b 是常数。

当 $Y=\frac{a}{X}$ 时

$$y=\frac{a}{x},\quad x=\frac{a}{y},\ \varphi'(x)=-\frac{a}{x^2},$$

则 $$p_Y(y)=\frac{a}{y^2}\,p_X\left(\frac{a}{y}\right),\qquad (5.14)$$

其中 a 是常数。

二、二元随机变量函数的分布　设二维随机变量（X，Y）与另一随机变量 Z 有如下的函数关系

$$Z=\varphi(X,\ Y)$$

D_z 是满足条件 $\varphi(X,\ Y)<Z$ 的积分区域，$p(x,\ y)$ 是二维随机变量（X，Y）的分布密度，则一维随机变量 Z 的分布密度为

$$p(z)=\frac{d}{dz}\iint_{D}p(x,y)\,dx\,dy,\qquad (5.15)$$

当 $Z=X+Y$ 时，

$$p(z)=\int_{-\infty}^{\infty}p(z-y,y)\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,z-x)\,dx,$$

(5.19)

当 $Z=\frac{X}{Y}$ 时，

$$p_z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|y|\,p(yz,y)\,dy.\qquad (5.17)$$

例5.3　图3-a是某钢结构水塔的结构简图。由于是空间结构，故其质心M有两个振动分量（X，Y），若它们的联合概率密度函数为

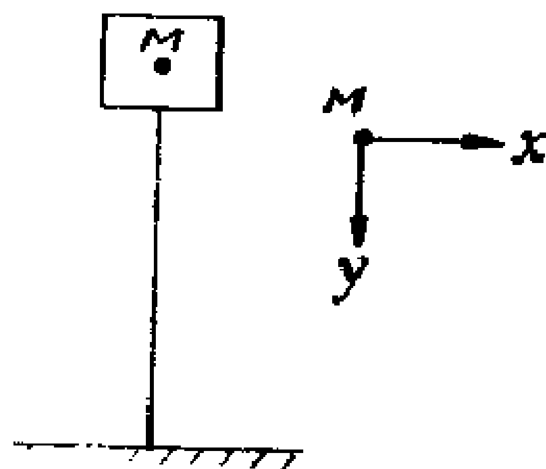


图 34

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2}}\times$$

$$\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho_{xy}^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2}-2\rho_{xy}\frac{xy}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)\right].$$

试确定水塔在 x，y 两个方向的振动分量之比 $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的概率密度。

解：根据(5.17)式得

$$p_z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|y|\,p(yz,y)\,dy=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2}}\cdot$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|y|\,\exp\left\{-\frac{y^2}{2(1-\rho_{xy}^2)}\times\right.$$

$$\left[\frac{z^2}{\sigma_x^2} - 2\rho_{xy}\frac{z}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{1}{\sigma_y^2}\right]\Bigg\}dy.$$

$$\because\quad \int_{-\infty}^{\infty}|y|\exp\left(-\frac{y^2}{2a^2}\right)dy = 2a^2\int_0^{\infty}W\exp(-W)dW$$

$$= 2a^2,$$

其中

$$a^2 = \frac{1-\rho_{xy}^2}{\dfrac{z^2}{\sigma_x^2} - \dfrac{2\rho_{xy}z}{\sigma_x\sigma_y} + \dfrac{1}{\sigma_y^2}}.$$

$$\therefore\quad p_z(z) = \frac{\dfrac{1}{\pi}\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2}}{\sigma_y^2\left(z-\rho_{xy}\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}\right)^2 + \sigma_x^2\left(1-\rho_{xy}^2\right)}.$$

若X与Y相互独立，则

$$p_z(z) = \frac{\dfrac{\sigma_x}{\pi\sigma_y}}{z^2 + \dfrac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}}.$$

习　题　五

5—1　设随机变量X的概率密度为

$$p(x) = \begin{cases} cx, & 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

试求常数c和X落在区(0.3, 0.7)内的概率。

5 — 2　设随机变量X的概率密度为

$$p(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1;\\ 0 & x<0 \text{ 和 } x>1.\end{cases}$$

试求函数$\eta=3x+1$的概率密度。

5 — 3　随机变量X的概率密度函数为

$p(x)=ae^{-b|x|}$，　　（a，b均为常数）

（1）试确定常数a与b之间的关系。

（2）当$a=1$时，试确定概率分布函数$P(x)$。

5 — 4　设随机变量X的分布函数为

$$P(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ Ax^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

试求(1)系数A的值。

(2)随机变量x落在区间(0.3，0.7)内的概率。

(3)随机变量x的分布密度。

5 — 5　设随机变量X的分布函数为

$P(x)=A+B\operatorname{arctg}x$，　　$-\infty<x<+\infty$.

试求系数A，B及随机变量X的分布密度.

5 — 6　随机变量X的分布密度为：

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sqrt{1-x^2}}, & |x|<1,\\ 0, & |x|\geqslant 1\end{cases}$$

试求系数A及分布函数。

5 — 7　图5.7是一个锯齿形脉冲系列，其中a是振幅，τ是周期，ξ表示相位。设ξ在(0，τ)区间内以等概率随机取值。试确定随机变量X的概率密度函数$p(x)$以及概率分布函数$P(x)$。



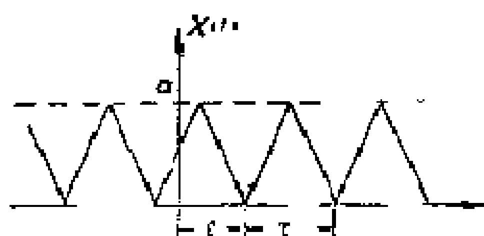


图 5·8

5—8 求图5.8所示三角波的概率密度函数（稳态遍历过程）。

5—9 若随机变量X的概率密度为$p_x(x)$，试求$Y=kX+b$的概率密度$p_y(y)$。 $(k>0)$

5—10 在随机整流正弦函数

$$x(\varphi)=|A\sin(\omega t+\varphi)|$$

中，A，ω都是常数，而φ在$(0, \pi)$之间等概率随机取值。试确定x的概率密度函数$p(x)$。

5—11 随机变量X的概率密度函数是

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & -1\leqslant x\leqslant 1;\\ 0, & x<-1 \text{和} x>1。\end{cases}$$

设随机变量Y与X的关系为，$y=x|x|$，试确定Y的概率密度函数$p(y)$。并证明它满足条件：

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(y)dy=1。$$

提示：$p(y)=p(x)\left|\dfrac{dx}{dy}\right|$，$x=x(y)$是$y=x|x|$的反函数。

5—12 设随机变量Y为另一随机变量X的函数，$Y=X^2$，而X的概率密度函数是均值为0，方差为1的标准正

态分布 $p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$。

试确定随机变量Y的概率密度函数 $p(y)$。

提示：（1）利用标准积分公式

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma^3,$$

$$\int_0^{\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=3\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma^5$$

（2）$P(y)=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} p(x)dx \quad y\geq 0$。

5－13　设随机变量X的分布密度为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi(x^2+1)}, & x>0;\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

试求随机变量 $y=\ln x$ 的分布密度。

5－14　随机变量X的分布密度为：

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sqrt{1-x^2}}, & |x|<1;\\ 0, & |x|\geqslant 1.\end{cases}$$

试求随机变量X落在区间$\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$内的概率。

5－15　设随机变量的分布函数是指数分布

$$P(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x\geqslant 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

求它的概率密度函数。

5－16　一端自由，一端固定的直杆如图5.16所示，在自由端上作用着法向随机力幅为 F_0 的周期干扰力，设力幅的概率分布为正态分布，力幅的平均值 σ_{F_0} 6.5Kg，标准离差 σ_{F_0} 2.4Kg，试求直杆上作用力在 10—12Kg 范围内的概率。

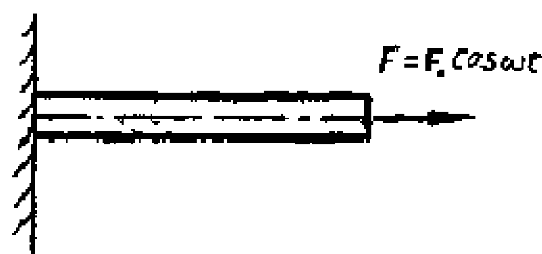


图　5.16

5－17　求图5.17所示各态历经过程的概率分布函数和概率密度函数，并画出它们随 x 变化的曲线。

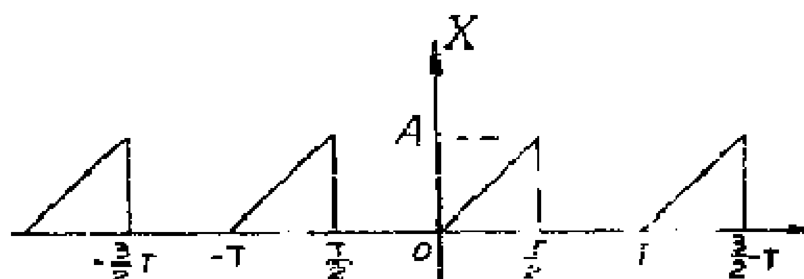


图　5.17

5－18　随机变量 Z 定义为两个不同的统计独立随机变量 X 和 Y 的函数，$Z=X+Y$，如果 $p(x)$ 为 X 的概率密度函数，$P(y)$ 和 $P(z)$ 是 Y 和 Z 的概率分布函数，试证明

$$P(z)=\int_{-\infty}^{\infty}P(y=z-x)\,p(x)\,dx。$$

此外若
$$p(x)=\begin{cases}0.5, & 0\leqslant x\leqslant 2;\\ 1, & x<0 \text{和} x>2。\end{cases}$$

$$p(y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y\leqslant 1;\\ 0, & y<0 \text{和} y>1。\end{cases}$$

试求随机变量Z的概率分布函数$P(z)$和概率密度函数$p(z)$。

提示：由于$p(x)$和$P(y)$不连续，应分别考虑以下四种情况：

(a) $0 \leqslant Z \leqslant 1$；(b) $1 < Z < 2$；
(c) $2 < Z \leqslant 3$；(d) $Z < 0$及$Z > 3$

5—19 两个高斯随机变量Z和Y的平均值为零，方差σ^2相同，如果其标准化协方差ρ_{xy} $\frac{1}{2}$。试写出二维概率密度函数$p(x, y)$和求出一维概率密度$p(x)$和$p(y)$以及条件概率密度函数$p(x/y)$。

5—20 两个连续随机变量$X(t)$和$Y(t)$的联合概率分布函数$P(x, y)$定义如下

$$P(x, y) = P_{rob}(X(t_0) < x, Y(t_0) < y)$$

求证 $p(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} P(x, y)$；

并验证 $P(x/y) = \frac{P(x, y)}{P(y)}$，

式中，$P(x/y)$是当$y(t_0) < y$时，$x(t_0) < x$的概率。

对于下列情况：
$$p(x, y) = \begin{cases} cxy & \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 \leqslant y \leqslant 1; \end{cases} \\ 0 & \text{其他值。} \end{cases}$$

试求$P(x, y)$标准化时的常数c，并确定(a)$P_{rob}\left(x > \frac{1}{2}\right)$；(b)$P_{rob}(x > y)$；(c)$P_{rob}\left(x > \frac{1}{2} \Big/ y < \frac{1}{2}\right)$。

提示：对(b)，(c)两问应在适当的 x 和 y 的范围内对 $p(x, y)$ 积分。

5—21 随机变量 X，Y 的分布函数为

$$F(x, y)=A\left(B+\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)\left(C+\operatorname{arctg}\frac{y}{3}\right)$$

试求(1)系数 A，B 及 C；(2)(x, y)的分布密度；(3)边缘分布函数。

5—22 随机变量(X, Y)的分布密度为

$$p(x, y)=\begin{cases}A(R-\sqrt{x^2+y^2}), & \text{当} x^2+y^2\leqslant R^2;\\ 0, & \text{当} x^2+y^2>R^2。\end{cases}$$

试求系数 A 的值及随机变量落在圆 $x^2+y^2=r^2(r<R)$ 内的概率。

5—23 二维随机变量(X, Y)在矩形区域 $a<x<b$，$c<y<d$ 内，服从均匀分布，试求其联合概率密度函数。

5—24 设二维随机变量(X, Y)的联合概率密度是

$$p(x, y)=\frac{c}{(1+x^2)(1+y^2)},$$

求系数 c 的值和随机变量(x, y)落在以(0，0)；(0，1)；(1，0)；(1，1)为顶点的正方形内的概率。

5—25 设二维随机变量(X, Y)的联合概率密度是

$$p(x, y)=\begin{cases}A\sin(x+y), & 0<x<\frac{\pi}{2}, 0<y<\frac{\pi}{2},\\ 0, & \text{其它。}\end{cases}$$

试求系数 A。

5—26 设两个相互独立的随机变量 X，Y 的概率密度

分别为

$$p_x(x)\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$$p_y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0;\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$$

试求$\eta=X+Y$的概率密度。

5—27　设两个相互独立的随机变量X，Y的概率密度分别为$p_x(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 0, & x<0\text{和}x>0.\end{cases}$

$$p_y(y)=\begin{cases}y, & 0\leqslant y\leqslant 1;\\ 2-y, & 1<y\leqslant 2;\\ 0, & y<0\text{和}y>2.\end{cases}$$

试求随机变量$\eta=x+y$的概率密度。

5—28　二维随机变量(X，Y)的分布密度为

$$p(x,y)=\begin{cases}A\sin(x+y), & 0<x<\dfrac{\pi}{2},0<y<\dfrac{\pi}{2};\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

求系数A及$p_x(x)$和$p_y(y)$。

5—29　二维随机变量(X，Y)服从正态分布

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi ab}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}$$

试求(X，Y)落在椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=k^2$内的概率。

5—30　已知二维随机变量（X，Y）服从正态分布，若$\mu_x=\mu_y=0$，$\sigma_x=16$，$\sigma_y=25$，$\rho_{xy}=12$，试写出概率密

度函数 $p(x, y)$。

5—31 设随机变量 X 与 Y 独立，并且 X 服从正态分布

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

Y 服从均匀分布

$$p(y)=\begin{cases}\frac{1}{2b}, & |y|\leqslant b; \\ 0, & |y|>b.\end{cases}$$

试求随机变量 $\eta=X+Y$ 的概率密度函数。

第 六 章

随机变量的均值和方差

内 容 提 要

§6.1 数学期望——均值

随机变量的一次矩

$$\mu_x = E[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx \qquad (6.1)$$

称为随机变量$X(t)$的数学期望或均值。式中，$p(x)$是随机变量X的概率密度。

对于各态历经的随机过程，可由一个样本函数的时间平均来求均值，即

$$\mu_x = E[x(t)] = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \qquad (6.2)$$

§6.2 均方值

随机变量的二次矩

$$\psi_x^2 = E[x^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx \qquad (6.3)$$

称为随机变量的均方值。在各态历经的情况下均方值也可用如下的时间平均来计算：

$$\psi_x^2 = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \qquad (6.4)$$

§6.3 方差

随机变量$X(t)$对于均值的二次中心矩

$$\sigma_x^2 = E\{[x(t) - \mu_x]^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 p(x)\, dx \qquad (6.5)$$

称为随机变量的方差. 它的正平方根σ_x称为标准差. 在各态历经的情况下方差也可通过时间平均的方法来计算:

$$\sigma_x^2 = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x - \mu_x)^2 dt \qquad (6.6)$$

§6.4 数字特征间的关系

方差等于均方值减去均值的平方

$$\sigma_x^2 = \psi_x^2 - \mu_x^2 \qquad (6.7)$$

§6.5 均值和方差的计算

各态经历随机过程的数字特征可分别采用求矩法和时间平均法来计算. 若样本记录x是时间的周期函数时, 用时间平均法比较简单. 它的计算步骤如下:

(a) 确定时间历程的函数关系.

(b) 选择计算的时间区间, 若是周期函数则选一个周期为计算区间.

(c) 分段进行时间积分.

(d) 计算平均区间趋于无穷大的极限(周期函数不必计算).

(e) 依次用平均法求出μ_x、ψ_x^2, 用(6.7)式求方差σ_x^2. 用求矩法时, 则应按下列步骤计算数字特征:

(1) 确定概率密度函数.

（2） 计算一次矩求均值μ_x。

（3） 计算二次矩求均方值。

（4） 用公式(6.7)求方差。

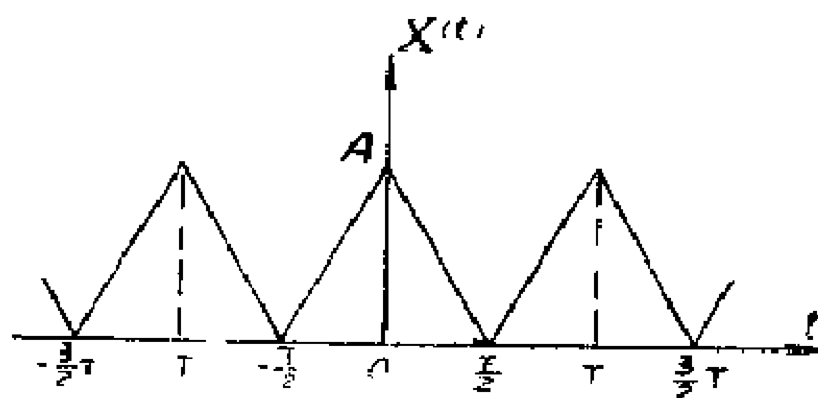


图 35

例 6—1 求图35所示三角波的均值，均方值和方差。

已知： A，T。

求： μ_x，ψ_x^2，σ^2。

解：（1）用时间平均法计算

三角波是时间的周期函数，其方程为

$$x=\begin{cases} A\left(1+\dfrac{2}{T}t\right), & -\dfrac{T}{2}\leqslant t\leqslant 0; \\ A\left(1-\dfrac{2}{T}t\right), & 0\leqslant t\leqslant \dfrac{T}{2}. \end{cases}$$

由(6.2)式得

$$\mu_x=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\,dt$$

$$
= \frac{1}{T}\left\{\int_{-\frac{T}{2}}^{0} A\left(1+\frac{2}{T}t\right)dt + \int_{0}^{\frac{T}{2}} A\left(1-\frac{2}{T}t\right)dt\right\}
$$

$$
= \frac{A}{T}\left\{\left[t+\frac{t^2}{T}\right]_{-\frac{T}{2}}^{0} + \left[t-\frac{t^2}{T}\right]_{0}^{\frac{T}{2}}\right\}
$$

$$
= \frac{A}{T}\left\{\frac{T}{2}-\frac{T^2}{4T}+\frac{T}{2}-\frac{T^2}{4T}\right\}
$$

$$
= \frac{A}{2}
$$

由(6.4)式得

$$
\psi_x^2 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)\,dt
$$

$$
= \frac{1}{T}\left\{\int_{-\frac{T}{2}}^{0} A^2\left(1+\frac{2}{T}t\right)^2 dt + \int_{0}^{\frac{T}{2}} A^2\left(1-\frac{2}{T}t\right)^2 dt\right\}
$$

$$
= \frac{A^2}{T}\left\{\frac{T}{2}\left[\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{T}t\right)^3\right]_{-\frac{T}{2}}^{0}
$$

$$-\frac{T}{2}\left[\frac{1}{3}\left(1-\frac{2}{T}t\right)^{3}\right]_{0}^{\frac{T}{2}}\Bigg\}$$

$$=\frac{A^2}{2}\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right\}$$

$$=\frac{A^2}{3}$$

由(6.7)式可算出方差

$$\sigma^2=\psi_x^2-\mu_x^2=\frac{A^2}{3}-\left(\frac{A}{2}\right)^2=\frac{A^2}{12}$$

(2) 用求矩法计算

在例5.1中已求出三角波的概率密度函数

$$p(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 1/A, & 0\leqslant x\leqslant A;\\ 0, & x>0\end{cases}.$$

由(6.1)式计算一次矩求均值

$$\mu_x=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)dx=\int_0^A x\cdot\frac{1}{A}dx$$

$$=\frac{1}{A}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^A=\frac{A}{2}$$

由(6.3)式计算二次矩求均方值

$$\psi_x^2=\int_{-\infty}^{\infty}x^2p(x)dx=\int_0^A x^2\cdot\frac{1}{A}dx$$

$$=\frac{1}{A}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^A=\frac{A^2}{3}$$

用(6.5)计算方差

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_x)^2 p(x)\,dx \\
&= \int_0^A \left(x-\frac{A}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{A}\,dx \\
&= \frac{1}{A}\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{A}{2}\right)^3\right]_0^A \\
&= \frac{1}{A}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{A}{2}\right)^3-\frac{1}{3}\left(-\frac{A}{2}\right)^3\right] \\
&= \frac{A^2}{12}
\end{aligned}
$$

可见，两种方法计算的结果完全相同。

习 题 六

6—1 试求题5—1中随机变量X的均值与方差。

6—2 设随机变量X的概率密度为

$$
p(x)=\begin{cases}\dfrac{c}{\sqrt{1-x^2}}, & |x|<1,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}
$$

试求常数c和随机变量X的均值与方差。

6—3 设轮船横向摇摆的随机振幅X的概率密度为

$$
p(x)=Axe^{-x^2/2\sigma^2}
$$

试求：(1)常数A的值。

(2)遇到大于其振幅均值的概率是多少。

(3)X的方差。

6—4 随机变量X具有概率密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a}, & 0\leqslant x\leqslant a;\\ 0, & x>a \text{ 和 } x<0。\end{cases}$$

试求它的均值$E[x]$，均方值$E[x^2]$以及方差σ^2。

6—5　某随机变量分布在0和1之间，其概率密度为

$$p(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 0, & x<0 \text{ 和 } x>1。\end{cases}$$

试求$E[x]$，$E[x^2]$和σ_x。

6—6　随机变量X具有均值为零方差为1的正态分布

$p(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$而随机变量$Y$定义为$X$的函数：

$Y=X^2$，试求$E[Y]$，$E[Y^2]$和σ_y。

提示：见5—12题。

6—7　时间函数$x(t)=A\left|\sin\dfrac{2\pi}{T}t\right|$称为整流正弦波，它的基本周期为$T/2$。试用时间平均来计算它的均方值和方差。

6—8　根据5—10题求得的随机整流正弦函数的概率密度

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}(A^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}, & 0\leqslant x\leqslant A;\\ 0, & x<0 \text{ 和 } x>A\end{cases}$$

计算它的均值$E[x]$和方差σ^2。

6—9　随机变量X的分布密度为（拉普拉斯分布）

$$p(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}\qquad -\infty<x<\infty$$

试求数学期望$E[x]$和方差σ^2。

6—10　某随机变量X服从马克斯威尔分布，其分布密度为

$$p(x)=\begin{cases}Ax^2e^{-x^2/a^2}, & x\geq 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

其中$a>0$，且为常数。求系数A，数学期望$E[x]$和方差σ_x^2。

6—11　计算图6.11所示三角波的均值和均方值。

6—12　具有稳态分量的正弦波可表示为

$$x=A_0+A_1\sin\omega t,$$

试求其数学期望和均方值。

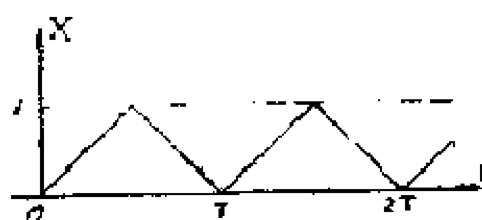


图 6·11

6—13　试计算图6.13所示各态历经过程的均值，均方值，方差和标准差。

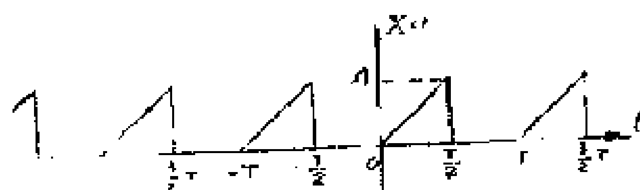


图 6·13

6—14　计算图6.14所示周期函数的均值，均方值和标准差。

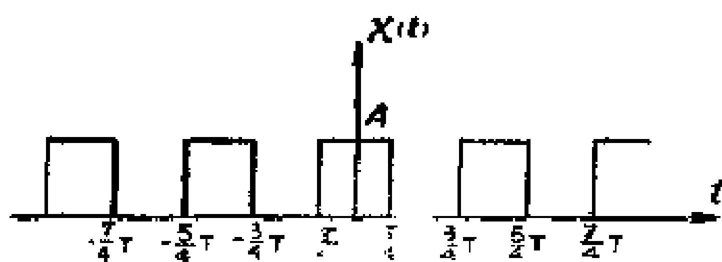


图 6·14

6—15　两随机变量X和Y的均值分别为$E[x]$和$E[y]$。若X和Y是统计独立的，则X和Y乘积的均值$E[X\cdot Y]$应等于各自平均值的积，即$E[X\cdot Y]=E[X]\cdot E[Y]$，若$Z=X+Y$，试证明：$E[Z^2]=E[X^2]+E[Y^2]+2E[X]\cdot E[Y]$

又若

$$p(x)=\begin{cases}0.5, & 0\leqslant x\leqslant 2;\\ 0, & x<0 \text{ 和 } x>2.\end{cases}$$

$$p(y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y\leqslant 1;\\ 0, & y<0 \text{ 和 } y>1\end{cases}$$

试求$E[Z^2]$和σ_z。

6—16　两个随机变量X和Y的联合概率密度函数为

$$p(x,y)=\frac{c}{1+x^2+y^2+x^2y^2},\quad -\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty,$$

式中c为常数。

（1）　求证X和Z为统计独立的；

（2）　确定使$p(x,y)$标准化的c值；

（3）　验证$E[x]=E[y]=0$，$E[x^2]=E[y^2]=\infty$。

6—17　试求6—19题中，当y值固定时随机变量X的平均值。

6—18　一个随机过程由一些样本函数的集合组成，每个样本函数是频率为ω的常振幅(x_0)的正弦函数。若各样本均具有相同的频率ω，而振幅和位相角φ随机变化，即样本表达式$x(t)=x_0\sin(\omega t+\varphi)$中，$x_0$、$\omega$和$\varphi$对每一个样本来说都是常数，而对样本集合来说$x_0$和$\varphi$都是随机变量。如果$x_0$和$\varphi$的联合概率密度函数为

$$p(x_0,\varphi)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi x}\left[1+\left(2\dfrac{x_0}{x}-1\right)\cos\varphi\right] & \begin{cases}0\leqslant\phi\leqslant 2\pi,\\ 0\leqslant x_0\leqslant x;\end{cases}\\ 0 & \text{其它值。}\end{cases}$$

试求集合平均值$E\{x^2\}$和$E[x^2/\varphi_0]$。

（注：后者表示只对于$\phi=\varphi_0$的那些样本取平均值$E[x^2]$。）

6—19 若随机变量X具有如下的概率密度函数

$$p(x)=\frac{1}{2}\delta(x+3)+\frac{1}{4}\delta(x-2)+\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2},\quad -\infty<x<+\infty$$

试求均方值和方差。

6—20 设随机变量X的概率密度函数为

$$p(x)=cxe^{-\left(\frac{x^2}{2}\right)},\ (x\geqslant 0\text{、}x<0\text{时}p(x)=0)$$

试求常数c的值及随机变量X的均值和方差。

6—21 设随机变量X的概率密度为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\cos^2 x, & -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2};\\ 0, & \text{其余。}\end{cases}$$

试求其均值和方差。

6—22 若随机变量的概率密度为

$$p(x)=\begin{cases}c(1-x^2)^a, & a>0,\quad -1<x<1;\\ 0, & \text{其余}x\text{。}\end{cases}$$

试求随机变量x的均值和方差。

6—23　二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$p(x,y)=A\sin(x+y)$$

试求此两随机变量的均值μ_x、μ_y和方差σ_x^2、σ_y^2。

6—24　已知二维随机变量(X,Y)的分布密度

$$p(x,y)=\frac{A}{(x^2+y^2+1)},$$

试求系数A，均值μ_x，μ_y和方差σ_x^2，σ_y^2。

6—25　若随机变量X,Y服从二维正态分布

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

试求随机变量$\eta=\sqrt{X^2+Y^2}$的数学期望及方差。

6—26　在图6.26所示的梁上作用有随机力θ，已知它的平均值μ_θ和方差σ_θ^2，以及梁的弯曲刚度EJ，试求梁上点D处的挠度，及最大正应力，支座A，B的反力以及它们的方差值。

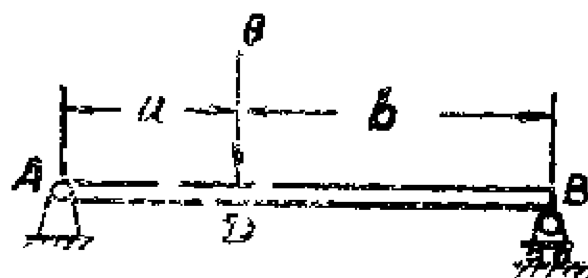


图 6·26

第 七 章

相关函数与谱密度的计算

内 容 提 要

§7.1 自相关函数与自功率谱密度

1. 自相关函数

取自同一随机过程的两个随机变量$X(t_1)$与$X(t_2)=X(t_1+\tau)$乘积的集合平均，称为自相关函数，对于定常过程来说它只是时差$\tau=t_2-t_1$的函数，即

$$R_x(\tau)=E[x(t)\cdot x(t+\tau)]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2p(x_1,x_2,\tau)dx_1dx_2, \tag{7.1}$$

其中$p(x_1x_2\tau)$是二维联合概率密度。

对于各态历经过程来说，自相关函数就等于单个样本乘积$x(t)\cdot x(t+\tau)$的时间平均

$$R_x(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)x(t+\tau)dt. \tag{7.2}$$

自相关函数有以下几点性质：

(a) 自相关函数是偶函数，即$R_x(\tau)=R_x(-\tau)$；

(b) 自相关函数是有界函数，其值在如下的范围内：

$$-\sigma_x^2+\mu_x^2\leqslant R_x(\tau)\leqslant\sigma_x^2+\mu_x^2,$$

(c) 在 $\tau=0$ 处，自相关函数具有极大值，且等于均方值，即

$$R_x(0)=\psi_x^2 \qquad (7.3)$$

(d) 当 $\tau\to\infty$ 时，自相关函数 $R(\tau)$ 趋于均值的平方，即

$$R_x(\tau\to\infty)\longrightarrow\mu_x^2 \qquad (7.4)$$

上述的这些性质可用图36所示的典型自相关函数曲线表示出来

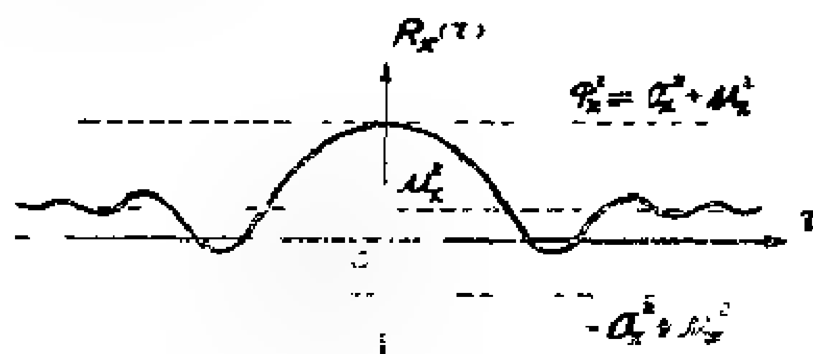


图 36

2. 自功率谱密度 *

自相关函数的富氏变换

$$S_x(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \qquad (7.5)$$

称为自功率谱密度，因此自相关函数又可定义为自功率谱密度的富氏逆变换，即

$$R_x(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_x(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega. \qquad (7.6)$$

由此可见，自相关函数和自谱密度函数构成一个富氏变换对。

* 也有作者定义为 $S_x(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$

若利用关系$\omega=2\pi f$将ω化成f，则可得到更对称的变换对形式：

$$
\begin{aligned}
S_x(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \\
R_x(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)e^{j2\pi f\tau}df
\end{aligned}
\qquad (7.7)
$$

自功率谱密度和自相关函数一样是偶函数，因而可将定义公式(7.7)简化为

$$
\begin{aligned}
S_x(f) &= 2\int_{0}^{\infty} R_x(\tau)\cos 2\pi f\tau d\tau, \\
R_x(\tau) &= 2\int_{0}^{\infty} S_x(f)\cos 2\pi f\tau df.
\end{aligned}
\qquad (7.8)
$$

对于各态历经过程，自功率谱密度也可由单个时间历程$x(t)$按如下的公式计算：

$$
S_x(f) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}A(f)\cdot A^*(f), \qquad (7.9)
$$

其中$A(f)=\int_{-\infty}^{\infty} x_T(t)e^{-j2\pi f t}dt$是

$$
x_T(t)=\begin{cases} x(t), & -\dfrac{T}{2}\leqslant t\leqslant\dfrac{T}{2}, \\ 0, & |t|>\dfrac{T}{2} \end{cases}
$$

的富氏积分，$A^*(f)$是$A(f)$的共轭复数。

以上定义了$-\infty\leqslant f\leqslant\infty$区域内的双边谱密度$S_x(f)$，实用上常采用定义于$0\leqslant f\leqslant\infty$的单边谱密度$G_x(f)$，即

$$
G_x(f)=2S_x(f), \qquad 0\leqslant f\leqslant\infty, \qquad (7.10)
$$

由公式(7.3)和(7.7)不难得到用功率谱密度计算均方值的重要公式

$$\psi_x^2 = R(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)df$$

$$= \int_{0}^{\infty} G_x(f)df. \tag{7.11}$$

§7.2 自相关函数和自谱密度函数的计算

1. 自相关函数的计算　自相关函数除可由已求得的功率谱密度作富氏逆变换来确定外，还可用集合平均法来求得。此集合是由样本函数在两个固定时间 t 和 $t+\tau$ 时的值组成。对于工程中常见的各态历经过程，由于任一个样本函数可以完全代表整个随机过程，因此只要对单个样本函数进行时间平均，便可求得自相关函数。在这种情况下，应将测量时间当成沿时间轴平均分布的随机变量。其解题步骤如下：

(a)找出单个样本函数；

(b) 划分出变化规律不同的区间；

(c) 选择时间平均区间。若是周期函数，则应选一个周期为计算区间；

(d) 根据式(7.2)用时间平均法计算自相关函数。

例7.1 某各态历经随机过程的各样本函数，均为幅值等于 a，周期等于 T 的方波，如图37所示，各样本函数的初位相（即 $t=0$ 后的函数值首次由负值变为正值的时刻），是一个在 0 与 T 之间均匀分布的随机变量。

已知：a，T。

求：$R_x(\tau)$。

解：由于所研究的各态历经过程的样本函数是一个周

期函数，故可以在一个周期内作时间平均，便可求得自相关函数．但由于样本函数不连续，故必须分段积分．为了方便

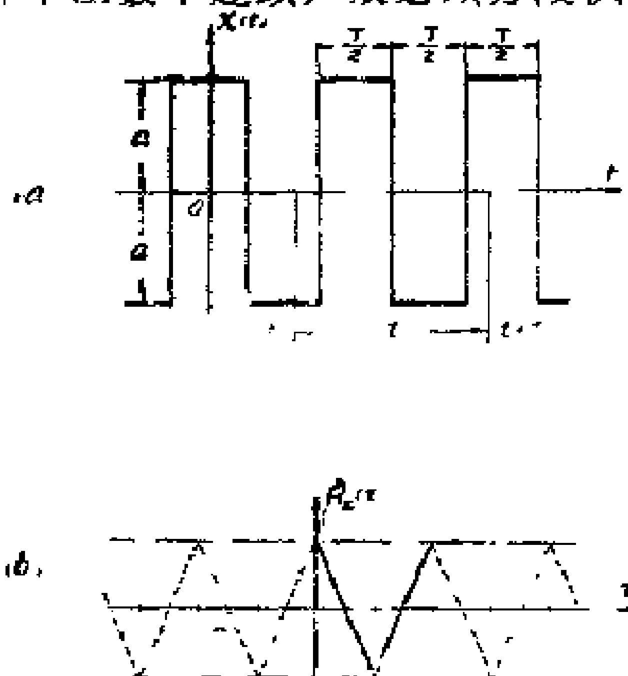


图 37

起见，在积分前，首先调整座标原点，使 $t=0$ 时为样本函数的变号点．然后分成以下两种情况进行积分

当 $0\leqslant\tau<T/2$ 时，由(7.2)式有

$$R_x(\tau)=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\cdot x(t+\tau)dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}-\tau} a\cdot a\,dt+\frac{1}{T}\int_{\frac{T}{2}-\tau}^{\frac{T}{2}} a\cdot(-a)dt$$

$$+\frac{1}{T}\int_{T/2}^{T-\tau}(-a)(-a)dt+\frac{1}{T}\int_{T-\tau}^{T}(-a)\cdot a\,dt$$

$$=a^2\left(1-4\frac{\tau}{T}\right); \qquad (a)$$

当 $T/2\leqslant\tau<T$，由(7.2)式有

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^{T-\tau} a^2 dt + \frac{1}{T}\int_{T-\tau}^{T/2} a^2 dt$$

$$+\frac{1}{T}\int_{\tau/2}^{\frac{3T}{2}-\tau} a^2 dt + \frac{1}{T}\int_{\frac{3T}{2}-\tau}^{T} a^2 dt$$

$$= a^2\left(-3 + 4\frac{\tau}{T}\right) \qquad (b)$$

由(a)(b)两式即可作出图37(b)中实线所示的自相关函数图。如果将此积分过程继续下去，便可得到图中虚线所示的自相关函数图。此图表明方波的自相关函数是等幅的三角波。

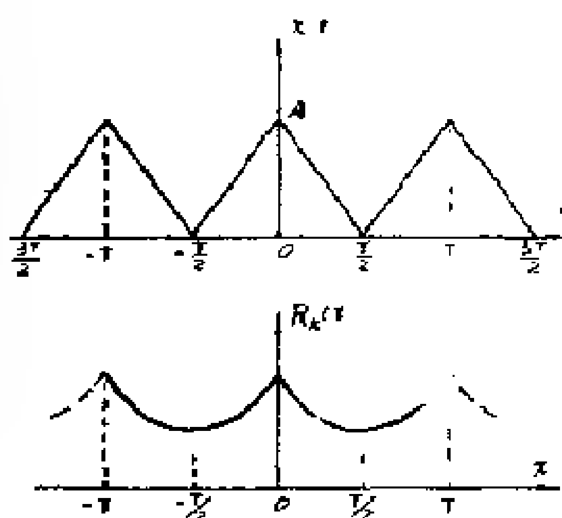


图 38

例7.2 设某各态历经随机过程的样本函数是图38所示的三角波。试求其自相关函数。

已知：A、T。

求：$R_x(\tau)$。

解：图示三角波可表示为：

$$x(t) = A\left(1 + \frac{2}{T}t\right) = x_1(t), \quad -\frac{T}{2} \leqslant t < 0,$$

$$x(t) = A\left(1 - \frac{2}{T}t\right) = x_2(t), \quad 0 \leqslant t < \frac{T}{2},$$

$$x(t) = A\left(\frac{2}{T}t - 1\right) = x_3(t), \quad \frac{T}{2} \leqslant t < T,$$

$$x(t) = A\left(3 - \frac{2}{T}t\right) = x_4(t), \quad T \leqslant t \leqslant \frac{3T}{2},$$

且有 $x(-t) = x(t)$。

利用公式(7.2)计算 $0<\tau<T/2$ 时的自相关函数为

$$
\begin{aligned}
R_x(\tau) = \frac{1}{T}\Bigg\{ & \int_{-\frac{T}{2}}^{-\tau} x_1(t)x_1(t+\tau)dt \\
& + \int_{-\tau}^{0} x_1(t)x_2(t+\tau)dt \\
& + \int_{0}^{\frac{T}{2}-\tau} x_2(t)x_2(t+\tau)dt \\
& + \int_{\frac{T}{2}-\tau}^{\frac{T}{2}} x_2(t)x_3(t+\tau)dt \Bigg\} \\
= & \frac{A^2}{3}\left[1 - 6\left(\frac{\tau}{T}\right)^2 + [illegible]\left(\frac{\tau}{T}\right)^3\right] \\
& 0<\tau<\frac{T}{2}.
\end{aligned}
$$

再用公式(7.2)计算 $\frac{T}{2}\leqslant\tau\leqslant T$ 时的自相关函数为

$$
\begin{aligned}
R_x(\tau) = \frac{1}{T}\Bigg\{ & \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}-\tau} x_1(t)x_2(t+\tau)dt \\
& + \int_{\frac{T}{2}-\tau}^{0} x_1(t)x_3(t+\tau)dt \\
& + \int_{0}^{[illegible]} x_2(t)x_3(t+\tau)dt
\end{aligned}
$$

$$+\int_{T-\tau}^{\frac{T}{2}} x_3(t)x_4(t+\tau)\,dt \Big\}$$

$$\frac{A^2}{3}\left[1-\frac{6}{T^2}(T-\tau)^2+\frac{8}{T^3}(T-\tau^3)\right]$$

$$\frac{T}{2}\leqslant\tau<T.$$

对应于其余的 τ 、$R_x(\tau)$ 表达式，可由上述二式导出。有时自功率谱密度可由实验或用公式(7.9)求出，在这种情况下自相关函数可用富氏逆变换确定。

例7.3 求图39所示窄带随机过程的自相关函数。

已知：S_0、ω_1、ω_2，

$|\omega_2-\omega_1|\ll\omega_1$。

求：$R_x(\tau)$。

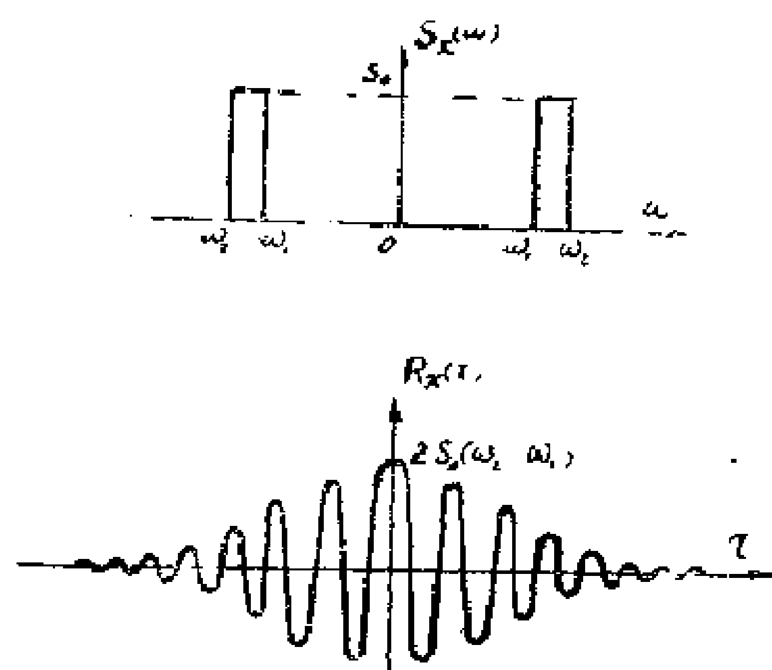


图 39

解：$$R_x(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_x(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_x(\omega)\cos\omega\tau d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\omega_2}^{-\omega_1}S_0\cos\omega\tau d\omega+\int_{\omega_1}^{\omega_2}S_0\cos\omega\tau d\omega\right]$$

$$=\frac{2}{2\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2}S_0\cos\omega\tau d\omega$$

$$=\frac{S_0}{\pi\tau}\sin\omega\tau\Big|_{\omega_1}^{\omega_2}$$

$$=\frac{S_0}{\pi\tau}(\sin\omega_2\tau-\sin\omega_1\tau).$$

2. 自功率谱密度函数的计算 计算自功率谱密度也有两种方法。一种是先求出自相关函数，再用(7.5)式求富氏变换来确定自功率谱密度函数；另一种方法是先求出样本函数$x(t)$的富氏变换，再用公式(7.9)来求功率谱密度。后一种方法的解题步骤如下：

(a) 找出各态历经过程的一个样本函数；

(b) 计算样本的富氏变换；

(c) 根据公式(7.9)计算自谱密度函数。

例7.4 设某各态历经过程的样本函数是图40所示的矩形函数

$$x(t)=\begin{cases}1, & (|t|<T);\\ 0, & (|t|>T).\end{cases}$$

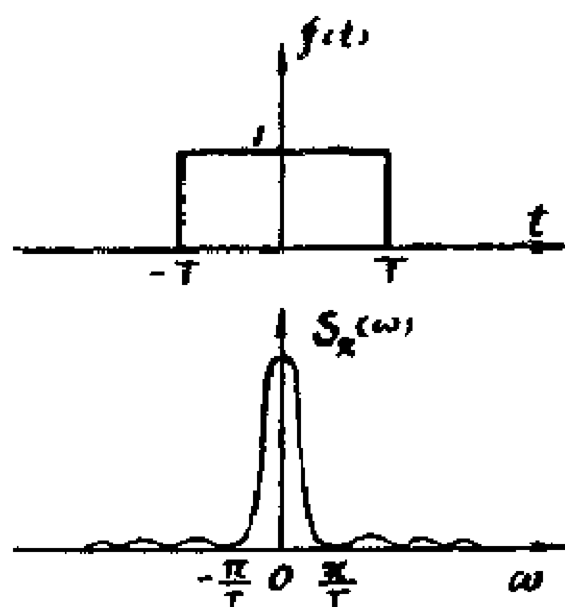


图 49

试求此随机过程的功率谱密度。

已知：T。

求：$S_x(\omega)$

解：首先由(7.10)式计算样本函数$x(t)$的富氏变换

$$A(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$=\int_{-T}^{T}e^{-i\omega t}dt$$

$$=\frac{2\sin\omega T}{\omega}.$$

把它代入公式(7.9)，便可求得自功率谱密度

$$S_x(\omega)=\frac{1}{2T}A(\omega)\cdot A^*(\omega)$$

$$=\frac{1}{2T}|A(\omega)|^2$$

$$\frac{2\sin^2\omega T}{T\omega^2}。$$

例7.5 相位随机变化的正弦波可视为一个随机过程，试求它的自相关函数和自谱密度函数。

已知：$x(t)=a\sin(\omega_0 t+\alpha)$。

求：$R_x(\tau)$、$S_x(\omega)$。

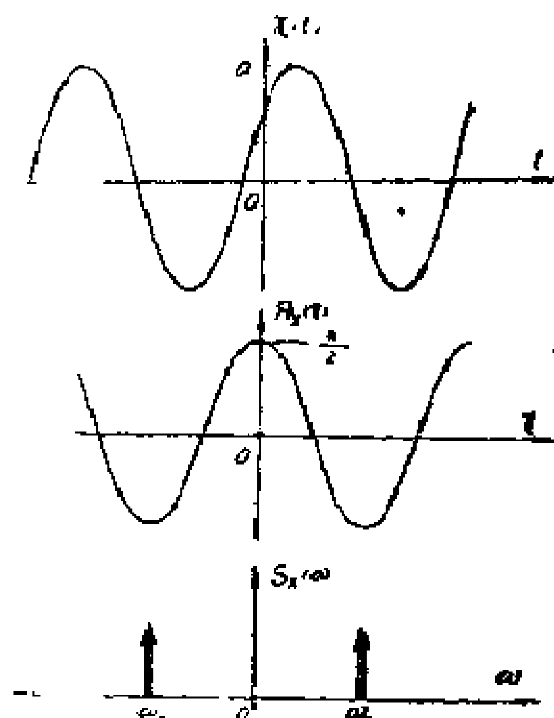


图 41

解：由(7.2)式得

$$R_x(\tau)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x(t+\tau)dt$$

$$=\frac{\omega_0}{2\pi}\int_{\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} a\sin(\omega_0 t+\alpha)$$

$$\cdot a\sin(\omega_0 t+\omega_0\tau+\alpha)dt$$

$$=\frac{a^2}{2}\cos\omega_0\tau .$$

利用(7.5)式计算自谱密度

$$S_x(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a^2}{2}\cos\omega_0\tau\cdot e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}(e^{j\omega_0\tau}+e^{-j\omega_0\tau})e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$=\frac{a^2}{4}\Big[\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j(\omega-\omega_0)\tau}d\tau$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j(\omega+\omega_0)\tau}d\tau\Big]$$

$$=\frac{\pi a^2}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)].$$

例7.6 设 $x(t)=2\delta(t)+\delta(t-T)$是两个间隔为$T$的脉冲，试求其自相关函数和自谱密度函数。

已知：$x(t)=2\delta(t)+\delta(t-T)$。

求：$R_x(\tau)$，$S_x(\omega)$。

解：根据公式(7.2)用时间平均法求自相关函数：

$$R_x(\tau)=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T[2\delta(t$$

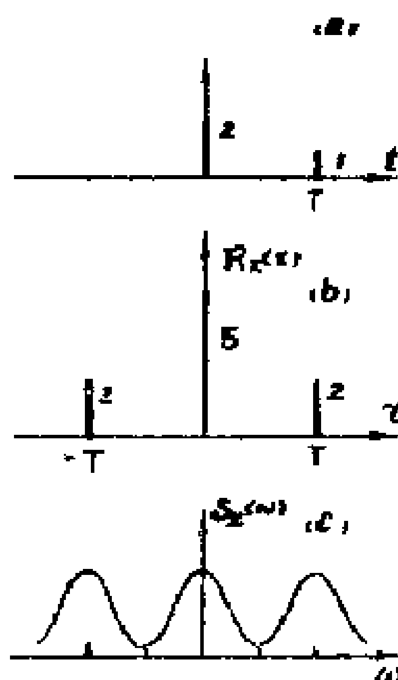


图 42

$$
\begin{aligned}
& \delta(t-T)] \\
& \cdot[2\delta(t+\tau)+\delta(t-T+\tau)]dt \\
= & \frac{1}{T}\int_0^T 4\delta(t+\tau)\delta(t)dt \\
& +\frac{1}{T}\int_0^T \delta(t-T)\delta(t-T+\tau)dt \\
& +\frac{1}{T}\int_0^T 2\delta(t-T)\delta(t+\tau)dt \\
& +\frac{1}{T}\int_0^T 2\delta(t)\delta(t-T+\tau)dt \\
= & \frac{1}{T}[4\delta(\tau)+\delta(\tau)+2\delta(T+\tau)+2\delta(\tau-T)] \\
= & \frac{1}{T}[5\delta(\tau)+2\delta(T+\tau)+2\delta(\tau-T)].
\end{aligned}
$$

由此可绘出图42(b)所示的自相关函数曲线。

由(7.5)式作自相关函数的富氏变换，便可求得自功率谱密度

$$
\begin{aligned}
S_x(\omega) = & \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \\
= & \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}[5\delta(\tau)+2\delta(\tau+T) \\
& +2\delta(\tau-T)]e^{-j\omega\tau}d\tau \\
= & \frac{5}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \\
& +\frac{2}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau+T)e^{-j\omega\tau}d\tau \\
& +\frac{2}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau-T)e^{-j\omega\tau}d\tau
\end{aligned}
$$

$$\frac{5}{T}+\frac{2}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau+T)e^{-j\omega(\tau+T)}d\tau\cdot e^{j\omega T}$$

$$+\frac{2}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau-T)e^{-j\omega(\tau-T)}d\tau\cdot e^{-j\omega T}$$

$$=\frac{5}{T}+\frac{2}{T}(e^{j\omega T}+e^{-j\omega T})=\frac{5}{T}+\frac{4}{T}\cos\omega T.$$

由此式可作出图42(c)所示的自功率谱曲线。

§7.3 互相关函数和互功率谱密度函数

1． 互相关函数 两个不同的定常随机过程X和Y之间的互相关函数定义为：

$$R_{xy}(\tau)=E[x(t)y(t+\tau)]$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1y_2p(x_1,y_2,\tau)dx_1dy_2,$$
$$R_{yx}(\tau)=E[y(t)x(t+\tau)]$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_2y_1p(x_2,y_1,\tau)dx_2dy_1; \qquad (7.12)$$

式中下标1表示在时刻t的取值，下标表2示在时刻$t+\tau$的取值。

对于遍历过程，互相关函数可用一个时间历程的时间平均来确定，即

$$R_{xy}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)y(t+\tau)dt,$$

$$R_{yx}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T y(t)x(t+\tau)dt. \qquad (7.13)$$

在一般情况下，$R_{xy}(\tau)$和$R_{yx}(\tau)$是不相同的，它和自相关函数不一样，互相关函数不是偶函数。但他们之间存在着如下关系：

$$R_{xy}(\tau) = E[x(t-\tau)y(t)] = R_{yx}(-\tau),$$

$$R_{yx}(\tau) = E[y(t-\tau)x(t)] = R_{xy}(-\tau)。\quad (7.14)$$

互相关函数R_{xy}是一个有界函数，其值界于如下不等式范围内：

$$-\sigma_x\sigma_y+\mu_x\mu_y \leqslant R_{xy}(\tau) \leqslant \sigma_x\sigma_y+\mu_x\mu_y, \quad (7.15)$$

式中σ_x，σ_y分别是$x(t)$，$y(t)$的标准差，μ_x，μ_y是$x(t)$，$y(t)$的均值。

对于大多数随机过程，当时差τ很大时，两个互相关函数都要趋于确定值$\mu_x\mu_y$，即

$$R_{xy}(\tau\to\infty)\to\mu_x\mu_y,$$

$$R_{yx}(\tau\to\infty)\to\mu_y\mu_x。$$

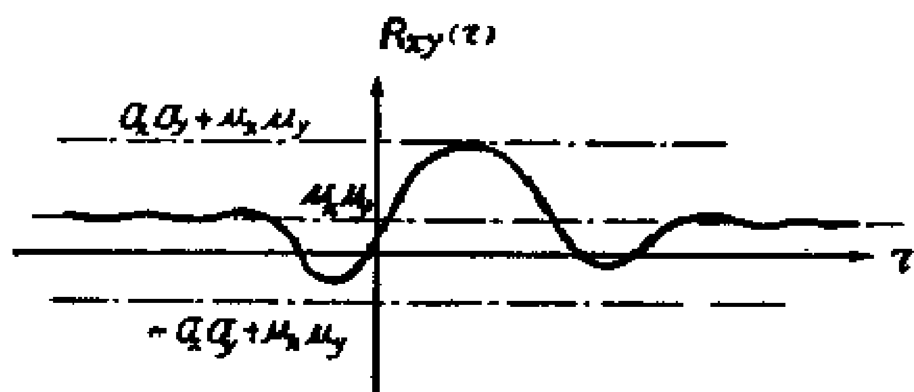


图 43

根据上述性质，可用图43来表示互相关函数$R_{xy}(\tau)$随时差τ变化的一种可能形状。

2． 互功率谱密度函数　互相关函数的富氏变换

$$S_{xy}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{xy}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau,$$

$$S_{yx}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{yx}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau; \quad (7.16)$$

称为这两随机过程的互谱密度。因此，互相关函数又可定义为互谱密度的富氏逆变换。即

$$R_{xy}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_{xy}(\omega)e^{i\omega\tau}d\tau,$$

$$R_{yx}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_{yx}(\omega)e^{i\omega\tau}d\tau. \qquad (7.17)$$

两个随机过程$X(t)$和$Y(t)$的两个互谱密度$S_{xy}(\omega)$和$S_{yx}(\omega)$是一对共轭复数，即他们的实部和虚部都相同，但虚部的符号相反，通常记为：

$$S_{yx}(\omega)=S^{*}_{xy}(\omega),$$

或

$$S_{xy}(\omega)=S^{*}_{yx}(\omega).$$

§7.4 互相关函数和互功率谱密度的计算

在一般情况下互相关函数可用集合平均的办法来计算。但对于两个各态历经的随机过程，则可用求样本函数的时间平均来确定互相关函数。求出互相关函数后，便可按公式(7.16)作富氏变换，求出相应的互功率谱密度函数。下面通过两个例题来说明其计算的特点。

例7.7 设两随机过程$x(t)$和$y(t)$都是由常振幅和固定频率不变的正弦波样本函数的集合所组成，他们每一个的典型样本函数分别为

$$x(t)=x_0\sin(\omega t+\theta)\quad,$$
$$y(t)=y_0\sin(\omega t+\theta-\varphi)\quad;$$

其中φ是一个不变的相位角，θ是在0与2π之间取值且概率都一样的随机变量，其概率密度可表为

$$p(\theta)=\begin{cases}1/2\pi\ , & 0\leqslant\theta\leqslant2\pi\ ;\\ 0\ , & \theta\text{ 其他值}\ ,\end{cases}$$

试求此两过程的互相关函数。

已知：$x(t)=x_0\sin(\omega t+\theta)$，

$$y(t)=y_0\sin(\omega t+\theta-\varphi),$$

$$p(\theta)=\begin{cases}1/2\pi, & 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi;\\ 0\ , & \theta \text{ 为其他值。}\end{cases}$$

求：R_{xy}，R_{yx}。

解：(1) 用集合平均法求解

利用公式(7.12)直接积分求相关函数

$$R_{xy}(\tau)=E[x(t)y(t+\tau)]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x_0\sin(\omega t+\theta)y_0\sin(\omega t+\omega\tau+\theta-\varphi)\frac{d\theta}{2\pi}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{x_0y_0}{2\pi}\sin(\omega t+\theta)[\sin(\omega t+\theta)\cos(\omega\tau-\varphi)+\cos(\omega t+\theta)\sin(\omega\tau-\varphi)]d\theta$$

$$=\frac{x_0y_0}{2\pi}\left[\cos(\omega\tau-\varphi)\int_0^{2\pi}\sin^2(\omega t+\theta)d\theta+\sin(\omega\tau-\varphi)\int_0^{2\pi}\cos(\omega t+\theta)d\cos(\omega t+\theta)\right]$$

$$=\frac{1}{2}x_0y_0\cos(\omega\tau-\varphi)$$

同理可求出另一个互相关函数

$$R_{yx}(\tau)=E[y(t)x(t+\tau)]$$

$$=E[y_0\sin(\omega t+\theta-\varphi)x_0\sin(\omega t+\omega\tau+\theta)]$$

$$=\frac{1}{2}x_0y_0\cos(\omega\tau+\varphi).$$

将上式的 τ 换为　得：

$$R_{yx}(-\tau) = \frac{1}{2} x_0 y_0 \cos(-\omega\tau + \varphi)$$

$$= \frac{1}{2} x_0 y_0 \cos(\omega\tau - \varphi)$$

$$= R_{xy}(\tau).$$

它与公式(7.14)的关系一致。

(2) 利用时间平均法求解

由于我们假设 θ 在 0 到 2π 之间均匀分布，故 $x(t)$ 和 $y(t)$ 两个随机过程都是各态历经的，因此可以用样本函数的时间平均来计算自相关函数。由于两个随机过程的样本函数都是具有相同周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 的周期函数，因此只需在一个周期内作时间平均即可。根据式(7.13)可写出

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T x_0 \sin(\omega t + \theta) y_0 \sin(\omega t + \omega\tau + \theta - \varphi)\, dt$$

$$= \frac{\omega}{2\pi} x_0 y_0 \Big[\cos(\omega\tau - \varphi) \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2(\omega t + \theta)\, dt$$

$$+ \sin(\omega\tau - \varphi)\int_0^{2\pi/\omega} \cos(\omega t + \theta)\, d\cos(\omega t + \theta)$$

$$= \frac{1}{2} x_0 y_0 \cos(\omega\tau - \varphi).$$

这与前面所得结果相同。

例7.8 白噪音各态历经随机过程 $y(t)$ 是由一个相似过程 $x(t)$ 延迟时间 T 后产生的，假若 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的谱密度是 S_0，试求他们之间的互相关函数 $R_{xy}(\tau)$ 和 $R_{yx}(\tau)$，和互谱密度函数 $S_{xy}(\omega)$ 和 $S_{yx}(\omega)$。

已知：$y(t+T) = = x(t)$，$S_x(\omega) = S_y(\omega) = S_0$。

求：$R_{xy}(\tau)$，$R_{yx}(\tau)$，$S_{xy}(\omega)$，$S_{yx}(\omega)$。

解：因$y(t+T)=x(t)$，

则 $$y(t)=x(t-T),$$

$$y(t+\tau)=x(t+\tau-T).$$

代入公式(7.12)得

$$\begin{aligned}R_{xy}(\tau)&=E[x(t)y(t+\tau)]\\&=E[x(t)x(t+\tau-T)]\\&=R_x(\tau-T).\end{aligned}\qquad(a)$$

根据$x(t)$的功率谱密度$S_x(\omega)=S_0$，可求出它的自相关函数

$$\begin{aligned}R_x(\tau)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_x(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega\\&=S_0\delta(\tau).\end{aligned}\qquad(b)$$

将(b)代入(a)，便可求出互相关函数

$$\begin{aligned}R_{xy}(\tau)&=R_x(\tau-T)\\&=S_0\delta(\tau-T).\end{aligned}\qquad(c)$$

利用公式(7.14)，可求出另一个互相关函数

$$\begin{aligned}R_{yx}(\tau)&=R_{xy}(-\tau)=S_0\delta(-\tau-T)\\&=S_0\delta(\tau+T).\end{aligned}\qquad(d)$$

由(c)、(d)两式，可作出图44所示的延时白噪音的互相关图。



图 44

因为$x(t)$和$y(t)$两者都是白噪音过程，他们的互相关函数，除了使$x=y$的一个τ值外，其余处，都等于零。于

是有关系

$$R_{xy}(\tau=T)=R_{yx}(\tau=-T)=R_x(\tau=0)$$

根据(7.16)对求得的互相关函数(c)，(d)作富氏变换，便可求得互谱密度函数

$$S_{xy}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}S_0\delta(\tau-T)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$=S_0e^{-j\omega T}。\qquad (e)$$

$$S_{yx}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}S_0\delta(\tau+T)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$=S_0e^{j\omega T}，\qquad (f)$$

比较(e)、(f)两式，可见$S_{xy}(\omega)$与$S_{yx}(\omega)$互为共轭复数，即

$$S_{xy}(\omega)=S^*_{yx}(\omega)。$$

这与(7.18)的结论一致。

若令　$S_{xy}(\omega)=S_0(\cos\omega T-j\sin\omega T)$

$$=A(\omega)-jB(\omega)，$$

则有　$A(\omega)=S_0\cos\omega T，$

$$B(\omega)=S_0\sin\omega T。$$

由此便可求出互谱密度的模 $|S_{xy}(\omega)|=\sqrt{A^2(\omega)+B^2(\omega)}$

$$=S_0，$$

和它的相位角$\theta=tg^{-1}\dfrac{B(\omega)}{A(\omega)}$进一步可绘出图45所示的互谱密度函数图。

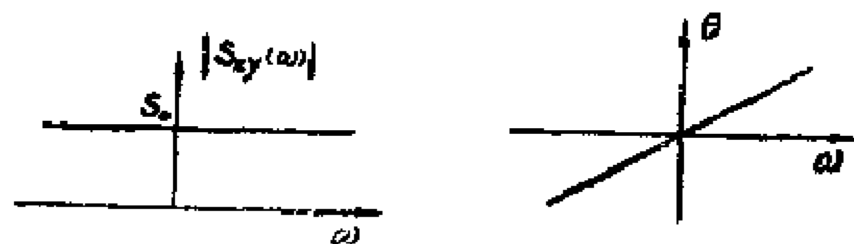


图 45

习 题 七

7—1 平稳随机过程的自相关函数：

(*a*) 必须随$|\tau|$的增大而下降；

(*b*) 仅是时间差的函数；

(*c*) $|\tau|$增加时必须趋近于常数；

(*d*) 必须总是非负的。

试指出其中哪些特性是正确的。

7—2 如果平稳随机过程不包含任何周期分量，试问上题中哪些特性是正确的。

7—3 假定某平稳随机过程的频率$f=0$时的谱密度为零，证明此过程的自相关函数满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)d\tau = 0$$

7—4 请指出平稳随机过程的概率密度函数$p(x)$，自相关函数$R_x(\tau)$和功率谱密度函数$G_x(f)$是否

(*a*) 必须是偶函数；

(*b*) 必须非负；

(*c*) 必须以零点的值为界；

(*d*) 能确定过程的均值；

(*e*) 能确定过程的方差；

(*f*) 能确定过程的概率密度函数；

(*g*) 能确定自相关函数；

(*h*) 能确定功率谱密度函数。

注：本题可分为三个问题来回答，看上述哪几条对每个$p(x)$成立，哪几条对每个$R_x(\tau)$成立，哪几条对每个$G_x(f)$

成立。

7—5　请指出：下面哪些函数是单边功率谱密度函数的正确表达式？

$$G_1(f)=\frac{f^2+9}{(f^2+4)(f+1)},\quad G_2(f)=\frac{f^2+1}{f^4+5f^2+6},$$

$$G_3(f)=\frac{f^2+4}{f^4-4f^2+3},\quad G_4(f)=\frac{e^{jf^2}}{f^2+2}.$$

7—6　对于两个各态历经随机过程，下面哪些性质是恒成立的？

(a) $R_{xy}(\infty)=\mu_x\mu_y$；

(b) $R_{xy}(0)=0$ 意味着$\mu_x=0$或$\mu_y=0$；

(c) $R_x(\tau)=0$或$R_y(\tau)=0$时，$R_{xy}(\tau)=0$；

(d) $|R_{xy}(\tau)|^2\leqslant R_x(\tau)R_y(\tau)$；

(e) $\mu_x=0$或$\mu_y=0$时，$G_{xy}(0)=0$；

(f) $|G_{xy}(f)|^2\leqslant G_x(0)G_y(0)$；

(g) $G_x(f)=0$或$G_y(f)=0$时，$G_{xy}(f)=0$；

(h) $G_x(\infty)=G_y(\infty)=G_{xy}(\infty)=0$；

(i) $p(x\cdot y)=p(x)p(y)$意味着$R_{xy}(\tau)=0$；

(j) $p(x\cdot y)=0$ 意味着$G_{xy}(f)=0$。

7—7　如果两随机过程的联合概率密度函数满足$p(x\cdot y)=p(x)\cdot p(y)$，则下列各性质何者恒成立？

(a) 对所有的滞后值τ，两过程之间互相关函数为零；

(b) 对所有的频率f的值，两过程之间的互谱密度函数为零。

7—8　设定常随机过程$\{x(t)\}$的功率谱密度为$S_x(\omega)$，自相关函数为$R_x(\tau)$。假设$x(t)$具有导数$\dot{x}(t)$和$\ddot{x}(t)$，求

么随机过程$\{\dot{x}(t)\}$，$\{\ddot{x}(t)\}$亦为定常的。试证明

(a) $\frac{d^2}{d\tau^2}R_x(\tau) = -R_{\dot{x}}(\tau)$；

(b) $S_{\dot{x}}(\omega) = \omega^2 S_x(\omega)$；

(c) $E[\dot{x}^2] = \int_{-\infty}^{\infty}\omega^2 S_x(\omega)d\omega$，

$E[\ddot{x}^2] = \int_{-\infty}^{\infty}\omega^4 S_x(\omega)d\omega$。

7－9 试求函数$f(t) = A$的自相关函数$R_f(\tau)$和功率谱密度。其中A是常数。

7—10 试求函数$f(t) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} a_K\delta(t - Kc)$的自相关函数和自功率谱密度。其中$a_1$，…，$a_K$和$c$是已知常数。

7—11 假定某平稳随机过程在$\omega = 0$时谱密度$S(0) = 0$。试证明此过程的自相关函数在$\tau = 0$处不可能是δ函数。

7—12 图7.12是某各态历经随机过程的一个样本函数。已知最大幅值A和周期T，试用时间平均法计算均值与自相关函数，并作出自相关图。

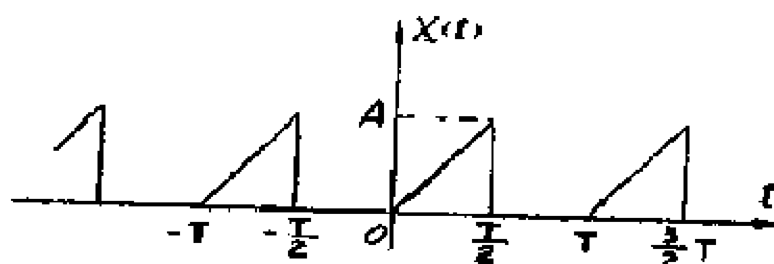


图 7·12

7－13 某各态历经过程的样本函数是图7.13所示的周期性矩形脉冲，

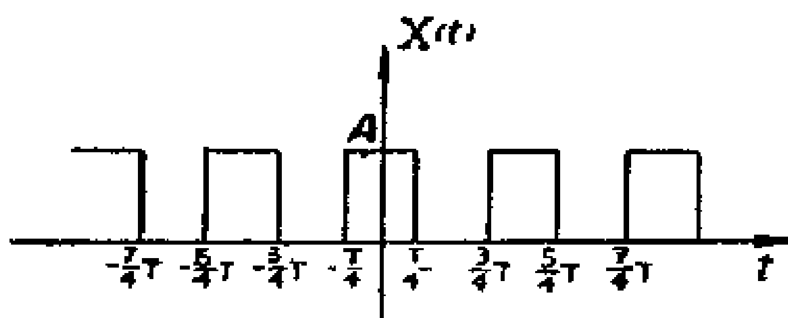


图 7·13

试用时间平均法计算均值均方值和自相关函数，并作出自相关图。

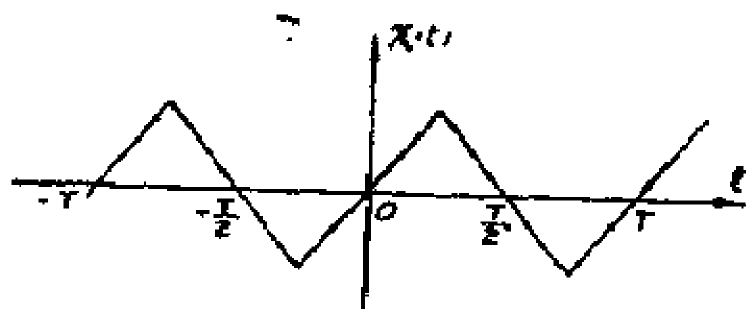


图 7·14

7—14 图7.14所示的周期函数是某各态历经随机过程的一个样本函数。试用时间平均法计算其自相关函数。

7—15 在随机整流正弦波

$x(t,\varphi)=A|\sin(\omega t+\varphi)|$

中，A和ω都是常数，而φ可在$(0,\pi)$之间等概率地随机取值。试确定x的自相关函数，均值和方差(图7.15)。

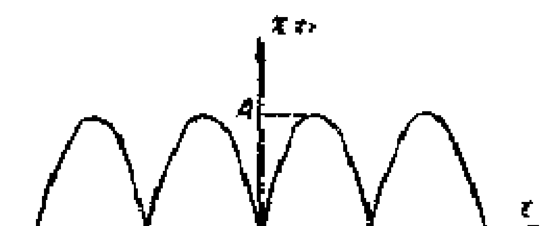


图 7·15

7—16 随机过程$x(t)$由幅值为$\pm a$，周期为T的方波样本函数的集合构成。如图7.16所示。每个样本的"相位"定义为样本函数在$t>0$中，首次由$+a$到$-a$变号的时刻$t=\Phi$，对不同样本来说Φ是一个具有均匀分布的随机变量，试用集合平均法计算过程$x(t)$的自相关函数

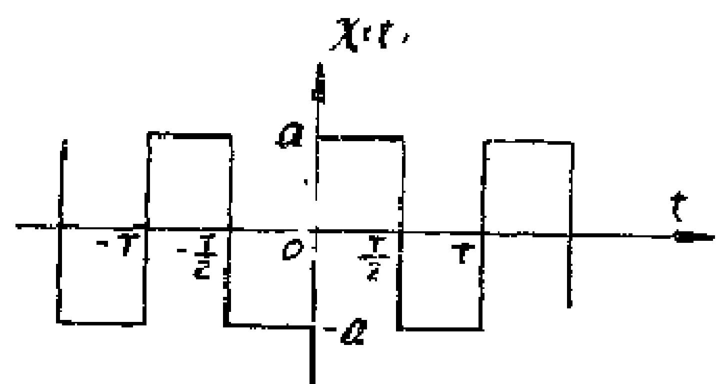


图 7·16

$$R_x(\tau)=E[x(t)x(t+\tau)]。$$

提示：单个样本函数的时间历程，可表示为富氏级数

$$x(t)=\frac{4a}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\cdots}\frac{1}{n}\sin\frac{2\pi n}{T}(\phi-t)。$$

7—17 已知自功率谱密度

$$S_x(\omega)=\frac{\omega^2+4}{\omega^4+10\omega^2+9}$$

求此平稳随机过程$X(t)$的自相关函数和均方值。

7—18 某平稳随机过程的每一样本函数$x(t)$均为

$$x(t)=a\cos(\omega t+\phi)$$

其中a，ω和ϕ为常数。振幅a对所有样本都相同，而ω和ϕ从一个样本到另一个样本是随机变化的。设ω和ϕ互相独立，且

$$p(\phi)=\begin{cases}1/2\pi, & 当0\leqslant\phi\leqslant 2\pi;\\ 0, & \phi为其他值。\end{cases}$$

$$p(\omega)=\begin{cases}1/2\omega_0, & 当-\omega_0<\omega<\omega_0;\\ 0, & \omega为其他值。\end{cases}$$

求自相关函数$R_x(\tau)$和自谱密度函数$S_x(\omega)$。

7—19 已知某随机信号的自相关函数$R(\tau)=\frac{1}{2}\cos\omega_0\tau$，试求其功率谱密度（$\omega_0$为常数）。

7—20 设某平稳随机过程的自相关函数为

$$R(\tau)=Ae^{-a|\tau|}$$

其中$A>0$，$a>0$。试求均值，均方值和功率谱密度函数。

7—21 某平稳随机过程的自相关函数为

$$R(\tau)=e^{-a^2\tau^2},$$

试求其功率谱密度。

7－22 已知某信号的自相关函数$R(\tau)=\frac{1}{4}e^{-2a|\tau|}$，求它的功率谱密度。

7—23 设某各态历经随机过程的样本函数为

$$x(t)=a_0+a_1\cos(\omega_1 t+\varphi),$$

试用时间平均法计算自相关函数和功率谱密度。

7—24 若某各态历经随机过程可以表示成如下的三角级数

$$x(t)=a_0+\sum_{K=1}^{n}a_K\cos(\omega_K t+\varphi_K),$$

试求其功率谱密度函数。

7—25 设某定常随机过程x的均值为零，方差为σ_x^2，它的自相关函数可表示为：

$$R_x(\tau)=\sigma_x^2 e^{-(\omega_1\tau)^2}\cos\omega_2\tau,$$

其中ω_1与ω_2为常数．试确定其功率谱密度$S_x(\omega)$。

提示：将$\cos\omega_2\tau$表示成$\frac{1}{2}(e^{j\omega_2\tau}+e^{-j\omega_2\tau})$再利用标准积分公式。

7－26 已知某平稳随机过程的自相关函数为

$$R_x(\tau)=e^{-a|\tau|}\cos\beta\tau,$$

式中a.β都是正的常数．试求功率谱密度。

7—27 已知平稳随机过程的自相关函数

$$R_x(\tau)=e^{-a\tau^2}\cos\beta\tau,$$

求功率谱密度。

7—28 若某平稳随机过程的自相关函数为

$$R_x(\tau)=e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau+\frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right),$$

式中α、β都是正常数。试求此随机过程的功率谱密度。

7—29 设某平稳随机过程的自相关函数为

$$R_x(\tau)=25e^{-4|\tau|}\cos 2\pi f\tau+16,$$

求均值μ_x和方差σ_x^2，并计算功率谱密度函数$S_x(f)$。

7—30 已知平稳随机过程的自相关函数为

$$R_x(\tau)=\begin{cases}a_0\left(1-\dfrac{|\tau|}{T}\right), & |\tau|<T;\\ 0, & |\tau|\geq T.\end{cases}$$

求功率谱密度。

7—31 设定常随机过程x，其功率谱密度可表示为

$$S_x(\omega)=S_0e^{-c|\omega|},$$

其中c与S_0均为常数。试确定其自相关函数$R_x(\tau)$。

7—32 设双边功率谱密度函数为

$$S_x(f)=\begin{cases}8\delta(f)+20\left(1-\dfrac{|f|}{10}\right), & |f|<10;\\ 0, & \text{其他}f\text{值}.\end{cases}$$

求均方值，方差和自相关函数。

7—33 若有限带宽随机白噪音x的功率谱密度可表示为

$$G(f)=\begin{cases}a, & 0<f_0-\dfrac{B}{2}\leq f\leq f_0+\dfrac{B}{2};\\ 0, & \text{其它}f.\end{cases}$$

其中f_0为中心频率，B为带宽，a为常数，试确定其自相关函数$R_x(\tau)$。

7—34 一随机过程的各样本函数$x(t)$由下式给出

$$x(t)=a_1\sin(\omega_1t+\phi_1)+a_2\sin(\omega_2t+\phi_2),$$

其中a_1，a_2和ω_1，ω_2为常数，ϕ_1，ϕ_2对同一样本为常数，而对不同样本为随机变量。如ϕ_1和ϕ_2统计独立，皆均匀分布于0到2π区间，试确定自相关函数$R_x(\tau)$。

7—35 某机器另件变位$x(t)$的单边谱密度为

$$S_x(f)=\begin{cases}0.01\ cm^2/Hz, & 0\leqslant f\leqslant 200Hz;\\ 0, & f>200Hz.\end{cases}$$

求变位x的均方值$E[x^2]$和过程$x(t)$的自相关函数。其中t的单位为秒。

7—36 某两个信号的时间历程分别为

$$x(t)=\begin{cases}\frac{b}{a}t, & 0\leqslant t\leqslant a;\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

$$y(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t\leqslant a;\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

试求其互相关函数$R_{xy}(\tau)$。

7—37 两随机过程的样本函数分别为

$$x(t)=a_1\sin(\omega_1 t+\phi_1)+a_2\sin(\omega_2 t+\phi_2),$$

$$y(t)=b_1\sin(\omega_1 t+\omega_1 t_0+\phi_1)+b_2\sin(\omega_2 t+\phi_3);$$

其中a_1，a_2，b_1，b_2，ω_1，ω_2，t_0均为常数，φ_1，φ_2，φ_3对同一样本为常数，对不同样本为随机变量，若ϕ_1，ϕ_2，ϕ_3彼此统计独立，且都均匀分布在0到2π区间。试求互相关函数$R_{xy}(\tau)$和$R_{yx}(\tau)$。

7—38 设一锻锤以规定的时间间隔工作，在基础上产生的应力函数的近似时间历程$x(t)$如图7.38(a)所示。每次冲击的时间b很短，即$b\ll T$，距锻锤某一距离处的地面加速度时间历程$y(t)$为

$$y(t)=c\sin\Omega(t-t_0)\sin\frac{2\pi}{T}(t-t_0),$$

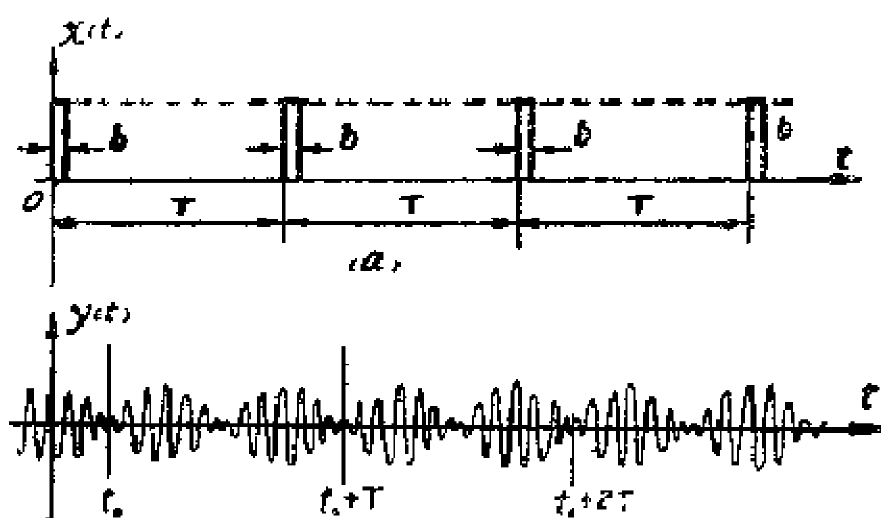


图 7·39

其中 c，Ω，T及t_0皆为常数，试求互相关函数$R_{xy}(\tau)$，$R_{yx}(\tau)$，和互谱密度函数$S_{xy}(f)$，$S_{yx}(f)$。

提示：在一周期内对$x(t)x(t+\tau)$积分求出样本均值。

7—39 一个随机振动的功率谱密度在20到120Hz的频率范围内是$S(f)=0.001cm^2/Hz$，在其他频率范围上为零，振动的平均位移为2cm如图7.39所示。试求均方值和方差。

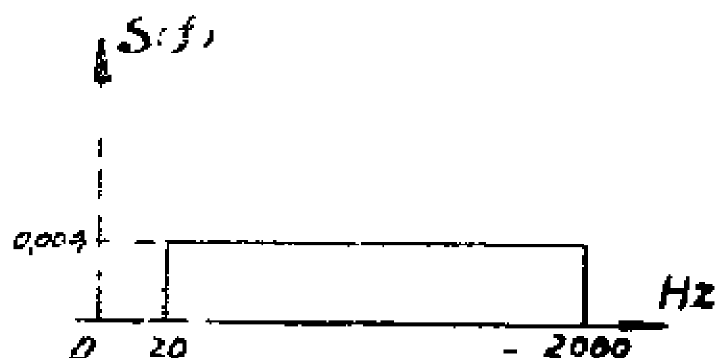


图 7·39

7—40 作用在梁上的随机载荷是两个集中力矩M_{x0}和M_{y0}如图7.40所示。已知这两个力矩的均值为μ_x和μ_y，方差为σ_x^2和σ_y^2，它们间的互协方差为c_{x0y0}，试求梁上任意截面

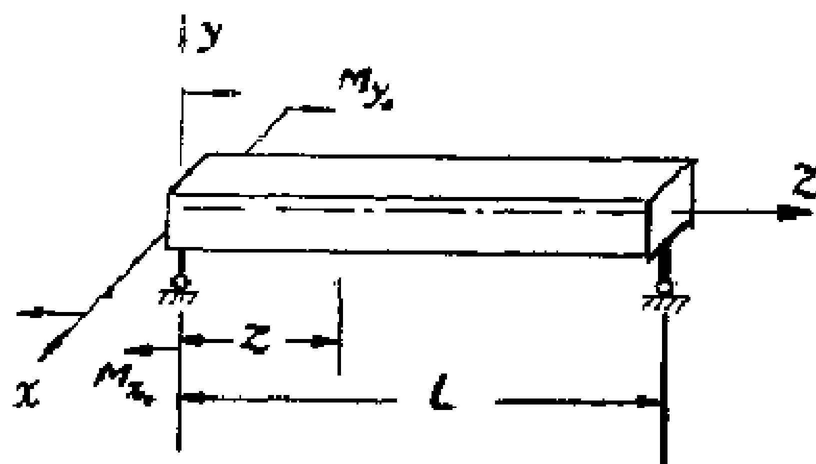


图 7-40

处最大正应力的平均值和方差。

提示： 根据材料力学写出任意截面上座标为(x, y)的任意点的正应力公式：

$$\sigma = \frac{M_x y}{J_x} + \frac{M_y x}{J_y} = \left(\frac{y}{J_x}M_{x0} + \frac{x}{J_y}M_{y0}\right)\left(1 - \frac{z}{L}\right)$$

其中J_x和J_y是轴惯性矩。

7—41 已知作用在图7.41所示梁上的随机分布载荷$q(z)$的均值$\mu_q(z)$和自相关函数$R_q(z, z_1)$试求支座反力N_A，N_B的均值和方差。

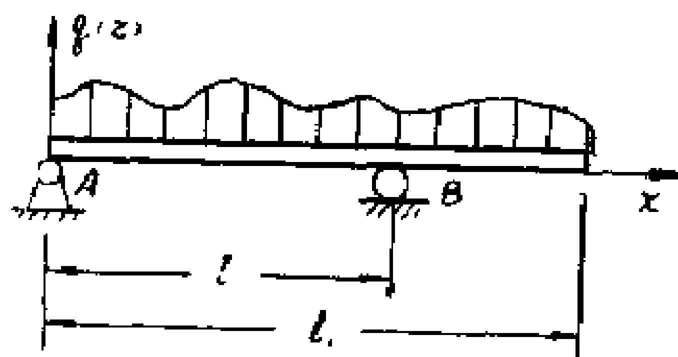


图 7·41

7—42 某沥青路面的不平度是稳定的，并具有高斯分布的幅值，其功率谱密度$S_z(\lambda) = 2\pi \times 10^{-[illegible]}(m)$试求在频率范围(a)$0.5 \leqslant \lambda \leqslant 50(m)(b)0 \leqslant \lambda \leqslant 100(m)$，内的均方值及主要的幅值分布范围。

7—43　一辆未装弹簧的汽车分别以速度 $v_1 = 15$ m/s 和 $v_2 = 1$ m/s 驶过一段功率谱密度为 $S(\lambda) = 2\pi \times 10^{-[illegible]}$ (m) 的沥青路面，试求在范围 $0.[illegible] \leq \lambda \leq [illegible]$ m 内车箱垂直加速度的分布情况。

注　(1) λ —— 波长

　　(2) 波长 λ、频率 f 与车速 v 的关系 $f = \dfrac{v}{\lambda}$

第 八 章

单输入与单输出随机振动问题

（单自由度系统）

内 容 提 要

§8.1 随机振动问题

一个系统受到随机因素的激励或系统的参数本身就是随机的情况下，都会产生随机振动。这一过程可用如下的方框图来表示。根据方框图所示的关系可以看出随机振动问题，就是应用随机过程理论，在激励（输入）、响应（输出）以及系统特性三者之中任知二者求第三者的问题，这样就可把随机振动问题分为以下三个类型。



图 46

1. 振动分析 是在已知激励和系统特性的条件下来求响应的问题。有时把这种问题称为动力分析。

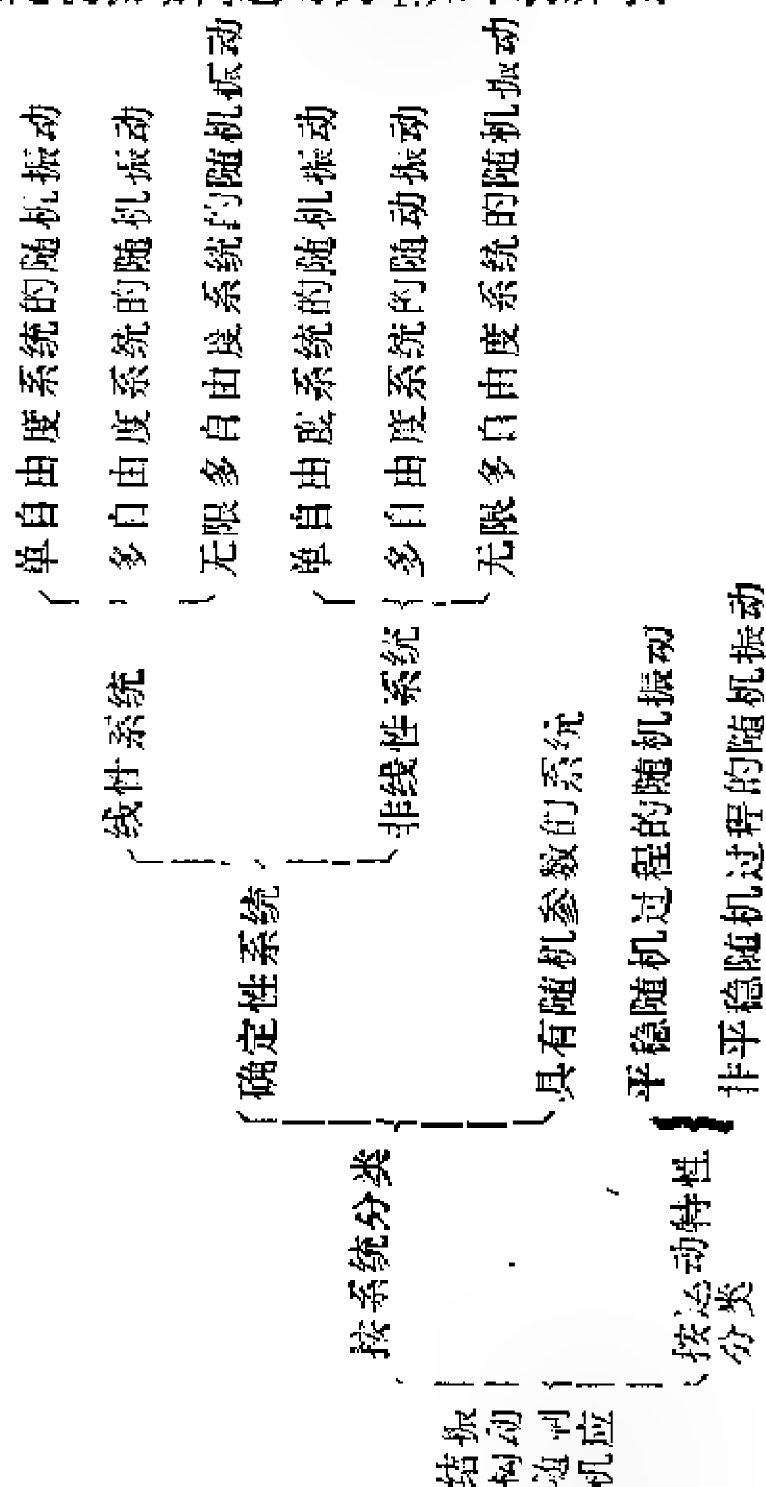
2. 振动环境预测 是在已知系统特性与响应的条件下，求系统激励的问题。

3. 振动特性测定 是在已知激励与响应的条件下确定系统特性的问题。有时又将这种问题称为系统识别。

在实际工作中经常遇到的是动力分析问题。这是因为任何振动系统在外来激励作用下都要产生动力响应，其结果会使组成系统的构件产生动应力，导致材料疲劳破坏，危及系

统安全；另一方面，动力响应又可能引起过大的动变形和加速度，影响机器的正常运转；并因伴随着产生相当大的噪音，恶化了劳动条件。因此在各种机械和结构的设计工作中，为了限制振动响应，就必须进行振动响应分析。

结构随机振动问题的类型如下表所示：



本书仅涉及输入，输出的统计特性与时间无关，而系统参数可用确定函数来描数的平稳随机振动。在本书前一至四章中已说明了系统动态特性的表示和计算方法，在五至七章中又说明了输入、输出随机过程统计特性的计算。从本章起将进行确定性系统在随机激励作用下所产生的随机响应的计算。

§8.2　单输入，输出线性系统激励与响应的关系

1.　输出的均值

$$\mu_y = H(0)\mu_x, \tag{8·1}$$

其中$H(0)$是频率响应函数在$\omega = 0$时的值；μ_x是输入$x(t)$的均值。

2.　输出的均方值

$$\psi_y^2 = R_y(0) \tag{8·2}$$

或

$$\psi_y^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega)d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 S_x(\omega)d\omega; \tag{8·3}$$

其中 $R_y(0)$是输出$y(t)$的自相关函数$R_y(\tau)$在$\tau = 0$时的值；

$S_x(\omega)$是输入$x(t)$的自功率谱密度；

$H(\omega)$是系统的频率响应函数（见第一章）。

在用(8·3)式计算均方值时常用到如下特殊的积分公式：

(a) $H(\omega) = \dfrac{B_0}{j\omega A_1 + A_0}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega = \pi\frac{B_0^2}{A_0 A_1},$$

(b) $H(\omega)=\dfrac{j\omega B_1+B_0}{-\omega^2A_2+j\omega A_1+A_0}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty}|H(\omega)|^2d\omega=\pi\frac{(B_0^2/A_0)A_2+B_1^2}{A_1A_2}; \quad (8\cdot4)$$

(c) $H(\omega)=\dfrac{-\omega^2B_2+j\omega B_1+B_0}{-j\omega^3A_3-\omega^2A_2+j\omega A_1+A_0}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty}|H(\omega)|^2d\omega=\pi\frac{\begin{matrix}(B_0^2/A_0)A_2A_3\\+A_3(B_1^2-2B_0B_2)+A_1B_2^2\end{matrix}}{A_1A_2A_3-A_0A_3^2};$$

(d) $H(\omega)=\dfrac{-j\omega^3B_3-\omega^2B_2+j\omega B_1+B_0}{\omega^4A_4-j\omega^3A_3-\omega^2A_2+j\omega A_1+A_0}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty}|H(\omega)|^2d\omega=\pi\frac{\left(\begin{matrix}(B_0^2/A_0)(A_2A_3-A_1A_4)\\+A_3(B_1^2-2B_0B_2)\\+A_1(B_2^2-2B_1B_3)\\+(B_3^2/A_4)(A_1A_2-A_0A_3)\end{matrix}\right)}{A_1(A_2A_3-A_1A_4)-A_0A_3^2}.$$

3． 输出的自相关函数

$$R_x(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(\lambda_1)h(\lambda_2)$$
$$\cdot R_x(\tau+\lambda_1-\lambda_2)d\lambda_1d\lambda_2. \quad (8\cdot5)$$

式中 $R_x(\tau)$——是输入的自相关函数；

$h(\lambda)$——是系统的脉冲响应函数（见第二章）。

若知道输出的自功率谱$S_x(\omega)$时，自相关函数可用富氏逆变换求得，即

$$R_x(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega. \quad (8\cdot6)$$

4． 输出，输入的互相关函数

$$R_{xy}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\lambda)R_x(\tau-\lambda)d\lambda \qquad (8\cdot7)$$

也可用如下互功率谱的富氏逆变换来确定：

$$R_{xy}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_{xy}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega. \qquad (8\cdot8)$$

5． 输出的自功率谱密度，

$$S_y(\omega)=|H(\omega)|^2S_x(\omega), \qquad (8\cdot9)$$

其中 $S_x(\omega)$是输入的自功率谱密度。

输出的自功率谱密度除用输入的功率谱来计算外，也常用输出的自相关函数的富氏变换来确定，即

$$S_y(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_y(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau. \qquad (8\cdot10)$$

6． 输出，输入的互谱密度

$$S_{xy}(\omega)=H(\omega)S_x(\omega) \qquad (8\cdot11)$$

或

$$S_{xy}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{xy}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau. \qquad (8\cdot12)$$

7． 输出，输入的谱相干函数

$$\gamma_{xy}^2=\frac{|S_{xy}(\omega)|^2}{S_x(\omega)S_y(\omega)}. \qquad (8\cdot13)$$

它的值能判别系统的线性特性和输出中是否有噪音干扰。

§8.3 随机输出响应的计算

从响应计算的公式(8·1)～(8·9)可以看出，除自相关函数$R_y(\tau)$以外其他的随机函数（如功谱密度等）都比较容易

计算。下面根据 $R_y(\tau)$ 所采用的不同公式，从两个方面来分别确定系统的输出响应。下面分别介绍它们的计算步骤。

1. 用卷积积分法确定输出响应的步骤：

(a) 分析系统的运动和受力情况，明确输出、输入参数。

(b) 计算系统的频率响应函数和脉冲响应函数。

(c) 确定输入的自相关函数和自谱密度函数。

(d) 利用公式(8·5)的卷积积分，计算输出自相关函数。

(e) 取自相关函数 $R_y(\tau)$ 在 $\tau=0$ 时的值，确定输出的均方值 ψ^2。

(f) 利用公式(8·9)求输出的自谱密度。

(g) 用现有的公式求其他统计函数。

2. 用富氏逆变换求输出响应的步骤：

(a) 分析系统的运动和受力情况，确定输出、输入参数。

(b) 计算系统的频率响应函数。

(c) 确定输入的功率谱密度。

(d) 用公式(8·9)计算输出的自功率谱密度 $S_y(\omega)$。

(e) 用公式(8·3)和特殊积分公式(8·4)计算均方值。

(f) 用富氏逆变换(8·5)计算输出的自相关函数。

(g) 其他统计函数的计算。

由两种方法所列的步骤可以看出第一种方法不但需要多计算脉冲响应函数，输入的自相关函数，而且还要进行比较复杂的二重卷积积分。第二种方法计算简单，计算量少，但要作富氏逆变换。因此在计算随机振动响应时，应根据问题的具体情况来选择计算方法。

例6·1 求图47所示的单自由度系统在理想白噪音输入作用下，输出的自相关函数，自谱密度函度和均方值。

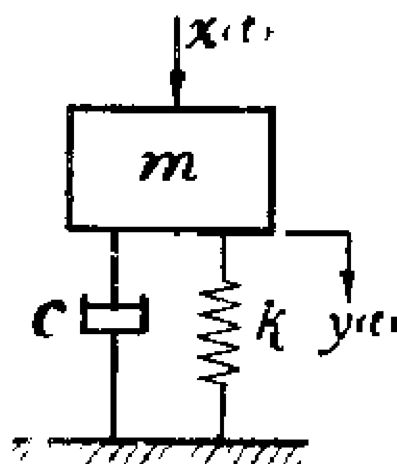


图 47

已知：m、k、c、$s_x(\omega)$ S_0。

求：$R_y(\tau)$、$s_y(\tau)$、ψ_y^2。

解：根据公式(7·6)计算输入的自相关函数

$$R_x(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_x(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_0e^{j\omega\tau}d\omega$$

$$=\frac{S_0}{2\pi}\left(\frac{e^{j\omega\tau}}{j\tau}\right)_{-\infty}^{\infty}$$

$$=\frac{S_0}{2\pi}\lim_{\omega\to\infty}\left(\frac{e^{j\omega\tau}}{j\tau}\right)_{-\omega}^{\omega}$$

$$=\frac{S_0}{2\pi}\lim_{\omega\to\infty}\frac{e^{j\omega\tau}-e^{-j\omega\tau}}{2j}\cdot\frac{2}{\tau}$$

$$=\frac{S_0}{\tau\pi}\lim_{\omega\to\infty}\sin\omega\tau$$

$$=S_0\lim_{\omega\to\infty}\frac{\sin\omega\tau}{\pi\tau}$$

$$=S_0\delta(\tau) \qquad (a)$$

用§2.3的方法可求得此有阻尼质量弹簧系统的脉冲响应函数

$$h(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{mp'}e^{-\zeta pt}\sin p't, & 当\ t>0;\\ 0, & 当\ t<0.\end{cases} \qquad (b)$$

式中 $p'=p\sqrt{1-\xi^2}$；$p=\sqrt{\frac{k}{m}}$；$\xi=\frac{c}{2\sqrt{mk}}$。

将(a)，(b)两式代入公式(8·5)，计算输出的自相关函数

$$R_y(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(\lambda_1)h(\lambda_2)R_x(\tau+\lambda_1-\lambda_2)d\lambda_1 d\lambda_2$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(\lambda_1)\cdot S_0\delta(\tau+\lambda_1-\lambda_2)h(\lambda_2)d\lambda_2 d\lambda_1$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}h(\lambda_1)\cdot S_0 h(\tau+\lambda_1)d\lambda_1$$

$$=S_0\int_0^{\infty}\frac{1}{mp'}e^{-\xi p\lambda_1}\sin p'\lambda_1$$

$$\times\frac{1}{mp'}e^{-\xi p(\tau+\lambda_1)}\sin p'(\tau+\lambda_1)d\lambda_1$$

$$=\frac{S_0}{m^2p'^2}\int_0^{\infty}e^{-\xi p(\tau+2\lambda_1)}$$

$$\times\sin p'\lambda_1\sin p'(\tau+\lambda_1)d\lambda_1$$

$$=\frac{S_0}{4m^2\xi p^3}e^{-\xi p|\tau|}\left\{\cos p'\tau+\frac{\xi p}{p'}\sin p'|\tau|\right\}$$

(c)

根据(8·2)式，在上式中令$\tau=0$便可求得均方值如下：

$$\psi_x^2=R_x(0)=\frac{S_0}{4m^2\xi p^3}=\frac{S_0}{2ck}\text{。}\qquad(d)$$

利用题1·9中求得的频率响应函数

$$H(\omega)=\frac{1}{k-m\omega^2+jc\omega}\text{，}$$

可算出 $|H(\omega)|^2=H^*(\omega)H(\omega)=\dfrac{S_0}{(k-m\omega^2)^2+c^2\omega^2}$， (e)

将它代入公式(8·9)，可求得输出的功率谱密度：

$$S_y(\omega)=|H(\omega)|^2S_x(\omega)$$

$$=\frac{S_0}{(k-m\omega^2)^2+c^2\omega^2}.$$

用公式(8·3)可由功率谱密度求出均方值为

$$\psi_y^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|H(\omega)|^2S_x(\omega)d\omega$$

$$=\frac{S_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{k-m\omega^2+jc\omega}\right|^2d\omega.$$

此积分可用(8·4)的第二个公式积出为

$$\psi_y^2=\frac{S_0}{2\pi}\times\pi\times\frac{1}{c}\frac{k\cdot m}{k\times m}=\frac{S_0}{2ck}$$

这与前面(d)式求得的结果相同。

例8·2 图48是一个由阻尼器和弹性悬臂梁所组成的振动系统。已知阻尼系数 c，杆的长度 L 和响应点 B 到支承面的距离 l，若在自由端水平方向作用的激振力的功率谱是 $G_x(\omega)=a_0$ 的白噪音谱，试求 B 点水平位移输出的自相函数，功率谱密度和均方值。

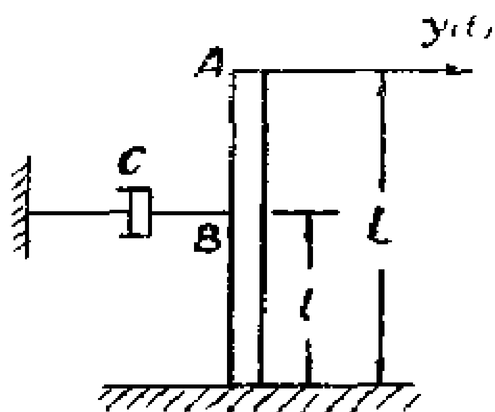


图 48

已知：c、L、l、$G_x(\omega)=a_0$。

求：$R_y(\tau)$、$S_y(\omega)$、ψ_y^2。

解：在题1.6和例2·1中已求出系统的脉冲响应函数和频

率响应函数为

$$h(\tau)=\frac{3L-l}{2lc}e^{-(3EJ/cl^3)\tau},\qquad \tau\geqslant 0$$

$$H(\omega)=\frac{3L-l}{2l(3EJ/l^3+jc\omega)}.$$

其中 $E=2\times10^6$ 是悬臂梁材料的弹性模量；J 是悬臂梁断面的惯性矩。

由输入的功率谱 $G_x(\omega)=a_0$ 计算输入的自相关函数：

$$R_x(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_x(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a_0}{2}e^{j\omega\tau}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{a_0}{2}2\pi\delta(\tau)$$

$$=\frac{a_0}{2}\delta(\tau).$$

用公式(8-5)计算输出的自相关函数

$$R_y(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(\lambda_1)h(\lambda_2)R_x(\tau+\lambda_1-\lambda_2)d\lambda_1d\lambda_2$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(\lambda_1)h(\lambda_2)\frac{a_0}{2}\delta(\tau+\lambda_1-\lambda_2)d\lambda_2d\lambda_1$$

$$=\frac{a_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}h(\lambda_1)h(\tau+\lambda_1)d\lambda_1.$$

当 $\tau\geqslant 0$ 时，$\tau+\lambda_1\geqslant\lambda_1\geqslant 0$

$$R_y(\tau)=\frac{a_0}{2}\int_{0}^{\infty}\frac{3L-l}{2lc}e^{-(3EJ/cl^3)\lambda_1},$$

$$\times \frac{3L-l}{2lc} e^{-(3EJ/cl^3)(\tau+\lambda_1)} d\lambda_1$$

$$= \frac{a_0}{2}\left(\frac{3L-l}{2lc}\right)^2 e^{-(3EJ/cl^3)\tau} \int_0^{\infty} e^{-2(3EJ/cl^3)\lambda_1}$$

$$\times d\left[(6EJ/cl^3)\lambda_1 \cdot \frac{cl^3}{6EJ}\right]$$

$$= -\frac{a_0}{2}\left(\frac{3L-l}{2lc}\right)^2 \left(\frac{cl^3}{6EJ}\right) \cdot e^{-(3EJ/cl^3)\tau}[0-1]$$

$$= \frac{a_0 l(3L-l)^2}{48cEJ} e^{-(3EJ/cl^3)\tau}$$

当 $\tau<0$ 时，只有在 $\lambda_1>-\tau$ 下才有 $\tau+\lambda_1>0$。

$$R_y(\tau) = \frac{a_0}{2}\int_{-\tau}^{\infty} \frac{3L-l}{2lc} e^{-(3EJ/cl^3)\lambda_1}$$

$$\times \frac{3L-l}{2lc} e^{-(3EJ/cl^3)(\tau+\lambda_1)} d\lambda_1$$

$$= -\frac{a_0}{2}\left(\frac{3L-l}{2lc}\right)^2 \cdot \left(\frac{cl^3}{6EJ}\right) \cdot e^{-(3EJ/cl^3)\tau}$$

$$\times \left[e^{-6(EJ/cl^3)\lambda_1}\right]_{-\tau}^{\infty}$$

$$= -\frac{a_0 l(3L-l)^2}{48cEJ} e^{-(3EJ/cl^3)\tau}$$

$$\times \left[0 - e^{6(EJ/cl^3)\tau}\right]$$

$$= \frac{a_0 l(3L-l)^2}{48cEJ} e^{(3EJ/cl^3)\tau}.$$

故 $$R_y(\tau) = \frac{a_0 l(3L-l)^2}{48cEJ} e^{-(3EJ/cl^3)|\tau|}, \quad -\infty<\tau<\infty$$

根据(8·2)式，令上式中 $\tau=0$ 后，得均方值

$$\psi^2=\frac{a_0 l(3L-l)^2}{48cEJ}.$$

利用(8·9)式求输出的功率谱密度

$$S_y(\omega)=|H(\omega)|^2S_x(\omega)=\left|\frac{3L-l}{2l(3EJ/l^3+jc\omega)}\right|^2\frac{a_0}{2}=\frac{a_0(3L-l)^2}{8l^2(9E^2J^2/l^6+c^2\omega^2)}.$$

由(8·3)式可得 $\psi_y^2=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|H(\omega)|^2S_x(\omega)d\omega$

$$=\frac{a_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|H(\omega)|^2d\omega$$

再根据(8·4)的第一个积分公式，并利用以下关系：

$B_0=(3L-l)/2l$，　$A_0=3EJ/l^3$，　$A_1=c$，

则可得 $\psi_y^2=\dfrac{a_0}{4\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|H(\omega)|^2d\omega$

$$=\frac{a_0}{4\pi}\cdot\frac{\pi B_0^2}{A_0A_1}$$

$$=\frac{a_0(3L-l)^2/4l^2}{4(3EJ/l^3)\cdot c}$$

$$=\frac{a_0l(3L-l)^2}{48cEJ}.$$

显然这与前面求得的结果相同。

例8·3 在图49所示弹簧阻尼系统中，弹簧端点的位移输入功率谱是理想的白噪声谱$S_x(\omega)=S_0$，若不计活塞的质量，已

知弹簧刚度 k、阻尼系数 c，试求活塞运动输入的功率谱密度，自相关函数和均方值。

已知：k、c、$S_x(\omega)=S_0$。

求：$S_y(\omega)$、$R_y(\tau)$、ψ_x^2。

解：由图49(b)所示的受力情况可列出活塞的运动微分方程为，$k(x-y)-c\dot{y}=0$，

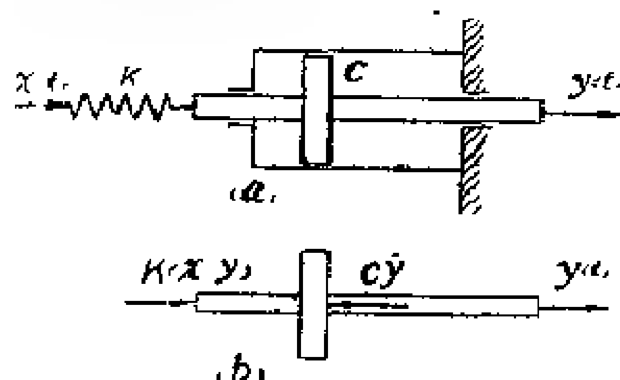


图 49

或 $$c\dot{y}+ky=kx。\qquad (a)$$

令 $x=e^{j\omega t}$，$y=H(\omega)e^{j\omega t}$，$\dot{y}=j\omega H(\omega)e^{j\omega t}$，并将它们代入($a$)式，即可求得系统的频率响应函数

$$H(\omega)=\frac{k}{k+jc\omega}。\qquad (b)$$

由此可得

$$|H(\omega)|^2=\frac{k^2}{k^2+c^2\omega^2}。\qquad (c)$$

将(c)式代入(8·9)，求输出的功率谱密度

$$S_y(\omega)=|H(\omega)|^2S_x(\omega)=\frac{k^2S_0}{k^2+c^2\omega^2}。\qquad (d)$$

将(d)式代入(8·3)式，求输出的均方值

$$\psi_y^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k^2 S_0}{k^2 + c^2\omega^2}\, d\omega$$

$$= \frac{k^2 S_0}{2\pi c^2}\left[\frac{1}{k/c}\, arc\; tg\, \frac{\omega}{k/c}\right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$= \frac{k S_0}{2\pi c}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{k S_0}{2c}.$$

将(d)式代入(8·6)式，求输出的自相关函数

$$R_y(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k^2 S_0}{k^2 + c^2\omega^2}\, e^{j\omega\tau} d\omega$$

$$= \frac{k S_0}{2c} \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2ck}{(k)^2 + (c\omega)^2}\, e^{j\omega\tau} d\omega$$

$$= \frac{k S_0}{2c}\, e^{-\frac{k}{c}|\tau|}.$$

式中的积分除可用留数定理求出外，也可视为函数 $e^{-\frac{k}{c}|\tau|}$ 的富氏变换。因为

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{k}{c}|\tau|}\, e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{k}{c}(-\tau)} e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{k}{c}\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{\left(\frac{k}{c} - j\omega\right)\tau} d\tau + \int_{0}^{\infty} e^{-\left(\frac{k}{c} + j\omega\right)\tau} d\tau$$

$$= \frac{1}{\frac{k}{c} - j\omega} e^{\left(\frac{k}{c} - j\omega\right)\tau} \Bigg|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{\frac{k}{c} + j\omega} e^{-\left(\frac{k}{c} + j\omega\right)\tau} \Bigg|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{\frac{k}{c} - j\omega} + \frac{1}{\frac{k}{c} + j\omega}$$

$$= \frac{2k/c}{\left(\frac{k}{c}\right)^2 + \omega^2} = \frac{2ck}{k^2 + c^2\omega^2}.$$

根据富氏逆变换的关系可得

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2ck}{k^2 + c^2\omega^2} e^{j\omega\tau} d\tau = e^{-\frac{k}{c}|\tau|}.$$

在计算时，通常可由专门的富氏积分表查出。

例8·4 独轮车在凹凸不平的路面上行驶时的力学模型如图50所示。设路面的空间功率谱密度函数

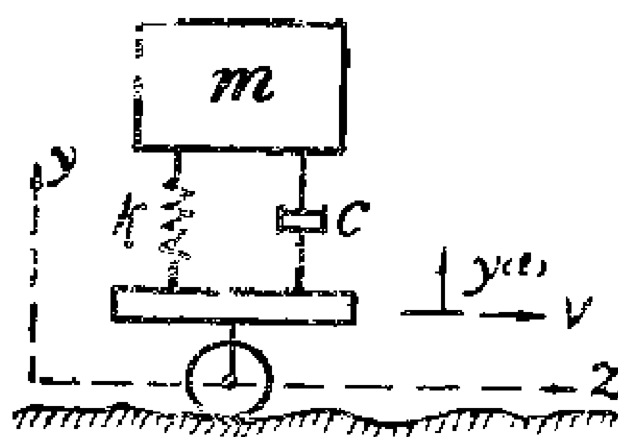


图 50

$S_y(\Omega)=S_0$ 常数，式中空间频率Ω与时间圆频率ω的关系为

$$\Omega=\frac{\omega}{2\pi V}.$$

当独轮车以速度V行驶时，试计算独轮车沿上下方向振动时位移的功率谱密度，自相关函数和均值。

已知：m、k、c、$S_y(\Omega)=S_0$。

求：　$R_x(\tau)$，$S_x(\omega)$，ψ_x^2。

解：　由牛顿定律列出独轮车的运动微分方程

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=c\dot{y}+ky. \tag{1}$$

在题(1·10)和(1·15)中已由此方程求出系统的频率响应函数与脉冲响应函数为

$$H(\omega)=\frac{1+j2\xi\omega/p}{1-\omega^2/p^2+j2\xi\omega/p}, \tag{2}$$

$$h(\tau)=e^{-\xi p\tau}\left(2\xi p\cos p'\tau+\frac{p^2-2\xi^2p^2}{p'}\sin p'\tau\right), \tag{3}$$

其中　$p'=p\sqrt{1-\xi^2}$，$p=\sqrt{\frac{k}{m}}$，$\xi=\frac{c}{2\sqrt{mk}}$。

将(2)式和路面输入的功率谱密度

$$S_y(\omega)=\frac{1}{2\pi V}S_y(\Omega)=\frac{S_0}{2\pi V}. \tag{4}$$

代入公式(8·9)计算输出的功率谱密度

$$S_x(\omega)=|H(\omega)|^2S_y(\omega)$$

$$= \frac{1+4\xi^2\omega^2/p^2}{(1-\omega^2/p^2)^2+4\xi^2\omega^2/p^2}$$

$$\times \frac{S_0}{2\pi V}. \qquad (5)$$

再将(2)式和(4)式代入公式(8·3)，并利用典型积分公式(8·4)计算输出的均方值：

$$\psi_x^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 S_y(\omega) d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{S_0}{2\pi V} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{k+jc\omega}{k+jc\omega-m\omega^2} \right|^2 d\omega$$

$$= \frac{S_0}{4\pi^2 V} \cdot \pi \cdot \frac{kc^2+mk^2}{k \cdot c \cdot m}$$

$$= \frac{S_0}{2\pi V} \cdot \frac{p(1+4\xi^2)}{4\xi}. \qquad (6)$$

把(4)式代入公式(8·6)计算输入的自相关函数：

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$= \frac{S_0}{2\pi V} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi\delta(t)$$

$$= \frac{S_0}{2\pi V} \delta(t). \qquad (7)$$

再把(3)，(7)式代入公式(8·5)计算输出的自相关函数：

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda_1)h(\lambda_2)R_y(\tau+\lambda_1-\lambda_2)d\lambda_1 d\lambda_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda_1)h(\lambda_2)\cdot\frac{S_0}{2\pi V}\delta(\tau+\lambda_1-\lambda_2)d\lambda_1 d\lambda_2$$

$$= \frac{S_0}{2\pi V}\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda_1)h(\tau+\lambda_1)d\lambda_1$$

$$= \frac{S_0}{2\pi V}\int_0^{\infty}\Big\{ e^{-\xi p\lambda_1}\Big[2\xi p\cos p'\lambda_1$$

$$+ \frac{p^2-2\xi^2p^2}{p'}\sin p'\lambda_1\Big]$$

$$\times e^{-\xi p(\tau+\lambda_1)}\Big[2\xi p\cos p'(\tau+\lambda_1)$$

$$+ \frac{p^2-2\xi^2p^2}{p'}\sin p'(\tau+\lambda_1)\Big]\Big\} d\lambda_1$$

$$= \frac{S_0}{2\pi V}e^{-\xi p\tau}\Big\{4\xi^2p^2\int_0^{\infty} e^{-2\xi p\lambda_1}\cos p'\lambda_1$$

$$\times \cos p'(\tau+\lambda_1)d\lambda_1 + 2\xi\frac{p^2(1-2\xi^2)}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\times\Big[\int_0^{\infty} e^{-2\xi p\lambda_1}\cos p'\lambda_1\sin p'(\tau+\lambda_1)d\lambda_1$$

$$+ \int_0^{\infty} e^{-2\xi p\lambda_1}\sin p'\lambda_1\cos p'(\tau+\lambda_1)d\lambda_1\Big]$$

$$+ \frac{p^2(1-2\xi^2)}{1-\xi^2}\int_0^{\infty} e^{-2\xi p\lambda_1}\sin p'\lambda_1$$

$$\times \sin p'(\tau+\lambda_1)d\lambda_1\Big\} = \frac{S_0}{2\pi V}e^{-\xi p\tau}$$

$$\times\left\{\left[\frac{1+\xi^2}{4\xi p}\cos p'\tau-\frac{p'}{4p^2}\sin p'\tau\right]\right.$$

$$+\left[\frac{p'}{2p^2}\cos p'\tau+\frac{2\xi^2}{4\xi p}\sin p'\tau\right]2\xi$$

$$\times\frac{p^2(1-2\xi^2)}{\sqrt{1-\xi^2}}+\left[\frac{1-\xi^2}{4\xi p}\cos p'\tau\right.$$

$$\left.\left.+\frac{p'}{4p^2}\sin p'\tau\right]\frac{p^2(1-2\xi^2)^2}{1-\xi^2}\right\}$$

$$=\frac{S_0 p(1+4\xi^2)}{8\pi V\xi}e^{-\xi p\tau}$$

$$\times\left\{\cos p'\tau+\frac{\xi(1-4\xi^2)}{\sqrt{1-\xi^2}\,(1+4\xi^2)}\sin p'\tau\right\}.$$

将 $\tau=0$ 代入上式，计算输出的均方值：

$$\psi_x^2=R_x(o)=\frac{S_0 p(1+4\xi^2)}{8\pi V\xi}.$$

可见与(6)式计算的结果相同。

例8·5 火箭中的某个部件可简化为图51所示的单自由度系统，当受到发动机水平加速度 $\ddot{x}(t)$ 作用后产生振动。已知单边功率谱密度 $S_{\ddot{y}}(f)=4\pi S_0(\omega)=0.125g^2/Hz$，$\xi=0.1$，$f_0=25Hz$，试求质量 m 不与油箱碰撞时它们之间应有的间隙 δ。

已知：$f_0=25Hz$，$\xi=0.1$，

$$S_{\ddot{y}}(f)=0.125g^2/Hz$$

求：$\delta=?$

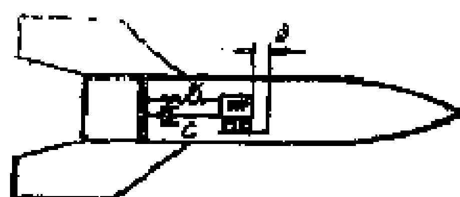


图 51

解：由牛顿定律可列出系统的运动微分方程式：

$$\ddot{x} + 2\xi p\dot{x} + p^2 x = -\ddot{y}(t). \qquad (1)$$

由此方程可求出相对位移输出$x(t)$所对应的加速度输入$\ddot{y}(t)$的频率响应函数：

$$H(\omega) = \frac{-1}{p^2 - \omega^2 + j2\xi p\omega}. \qquad (2)$$

把(2)式和输入的功率谱$S_{\ddot{y}}(\omega) = \frac{S_{\ddot{y}}(f)}{4\pi}$代入公式(8·3)，并利用典型积分公式(8·4)计算输出的均方值

$$\psi_x^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 S_{\ddot{y}}(\omega)d\omega$$

$$= \frac{S_0}{2\pi}\cdot\pi\cdot\frac{1}{p^2}\times\frac{1}{2\xi p}$$

$$= \frac{S_0}{4\xi p^3}. \qquad (3)$$

把$\omega = 2\pi f_c$，$S_0(\omega) = \frac{S_{\ddot{y}}(f)}{4\pi} = 0.01g^2$，代入(3)式得

$$\psi_x^2 = \frac{0.01g^2}{32\pi^3\times 0.1\times(25)^3}.$$

因为均值为零时的均方值就等于均方差值。则

$$\sigma_x = \sqrt{\psi_x^2} = 0.0025米 = 2.5毫米.$$

在对实际工程问题进行设计时，考虑到可靠度，一般取弹簧动变形均方根值的三倍为允许间隙。在这种情况下，根据3σ规则其可靠度为99.74%，因此质量与箱壁的间隙应为

$$\delta = 3\times\sqrt{\psi_x^2} = 3\times 2.5 = 7.5(毫米).$$

例3·6 计算单自由度质量弹簧系统在随机初始激励下的随机振动。

已知：m，k，c，且 $t=0$ 时，$x=x_0$，$\dot{x}=\dot{x}_0$

$$\mu_{x_0},\ \mu_{\dot{x}_0},\ \psi^2_{x_0},\ \psi^2_{\dot{x}_0},\ R_{x_0\dot{x}_0}.$$

求：μ_x，S_x，ψ^2_x。

解：由牛顿定律写出单自由度质量弹簧系统的运动微分方程为：

$$\ddot{x}+2\xi p\dot{x}+p^2x=0.$$

它满足起始条件 $t=0$ 时，$x(o)=x_0$ 和 $\dot{x}(o)=\dot{x}_0$ 的解是：

$$x(t)=e^{-\xi pt}\left(x_0\cos p't+\frac{\dot{x}_0+\xi px_0}{p'}\sin p't\right),$$

其中 $p'=p\sqrt{1-\xi^2}$，$p=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$，$\xi=\dfrac{c}{2\sqrt{mk}}$。由于初始瞬时的 x_0 和 $\dot{x}_0$ 是随机变量，因而振动位移输出 $x(t)$ 也是随机变量，它的统计值可按定义公式来计算

输出的均值为

$$\mu_x=E[x(t)]$$

$$=E[x_0]e^{-\xi pt}\left[\cos p't+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin p't\right]$$

$$+E[\dot{x}_0]\frac{e^{-\xi pt}\sin p't}{p'}$$

$$=\mu_{x_0}e^{-\xi pt}\left[\cos p't+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin p't\right]$$

$$+\mu_{\dot{x}_0}\frac{e^{-\xi p t}\sin p't}{p'}\Bigg]$$

输出的自相关函数为

$$R_x(t_1t_2)=E[x(t_1)x(t_2)]$$

$$=E[x_0^2]e^{-\xi p(t_1+t_2)}\left(\cos p't_1+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin p't_1\right)\left(\cos p't_2+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin p't_2\right)+E[x_0\dot{x}_0]e^{-\xi p_0(t_1+t_2)}$$

$$\times\frac{1}{p'}\left[\left(\cos p't_1+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin p't_1\right)\sin p't_2+\left(\cos p't_2+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin p't_2\right)\sin p't_1\right]$$

$$+E[\dot{x}_0^2]\frac{1}{p'^2}e^{-\xi p(t_1+t_2)}\sin p't_1\sin p't_2.$$

输出的均方值为：

$$\psi_x^2=E[x^2]$$

$$=E[x_0^2]e^{-2\xi pt}\left(\cos p't+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin p't\right)^2$$

$$+2E[x_0\dot{x}_0]e^{-2\xi pt}\cdot\frac{1}{p'}\left(\cos p't+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin p't\right)\sin p't$$

$$+E[\dot{x}_0^2]e^{-2\xi pt}\cdot\frac{1}{p'^2}\sin^2 p't.$$

例6·7 装电杆用的钻坑机可能在松散土，粘土或沥青路面等

不同的环境下工作，在各种钻坑情况下受到的地面阻力是随机的，它在 $f=5\sim20Hz$ 的范围内所激起扭振的自功率谱密度为常数，等于1.2$kg^2\cdot m^2/Hz$。系统的频率响应函数在若干频率处的值已列在下表中，试用列表计算钻机机轴转角的响应均方根值。

解：本题可简化为一个自由度扭转随机振动的单输入，单输出问题，故可用公式（8·3）来计算输出的均方值

$$\psi_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 S_x(f) df \qquad (8\cdot3)$$

在本题中，由于系统的频率响应函数没有用函数来描述，在这种不能找出 $|H(f)|^2$ 的函数表达式的情况下，应将输入谱和频率响应函数分成若干频带，令每个频带上的输入谱和频率响应函数均为常数，并将公式（8·3）写成求和的形式

$$\psi_y^2 = \sum_{i=1}^{N} |H(f_i)|^2 S_x(f_i)\Delta f \qquad (8\cdot14)$$

式中N为频带的个数。

由本题的已知数据，利用公式（8·14）可列出如下的表格。其右端第一项之和即为所求的均方值

$$\psi_y^2 = 2.563/2\pi = 0.408$$

由此可算出转角响应的均方根值：

$$\sqrt{\psi_y^2} = \sqrt{0.408} = 0.65 \text{ 弧度。}$$

次序	f_i Hz	$S_x(f_i)$ $kg^2/m^2/Hz$	$H(f_i)$ $rad/kg-m$	Δf Hz	$\|H(f_i)\|^2\Delta f$	$\|H(f_i)\|^2\Delta f S_x(f_i)$
1	5	1.2	0.348	1.5	0.363	0.4359
2	7	1.2	0.610	1	0.372	0.447
3	8	1.2	0.697	1	0.486	0.584
4	9	1.2	0.610	1	0.372	0.447
5	10	1.2	0.511	1	0.261	0.313
6	12	1.2	0.278	3	0.232	0.279
7	15	1.2	0.126	3	0.0467	0.0571
						+)2.563

§8-4 窄带过程的统计分析

(一)窄带过程的统计特性　谱密度的频带很窄的随机过程称为窄带随机过程。其功率谱曲线和自相关曲线如图52所示：

1. 窄带随机过程的方差和概率密度

$$\sigma_y^2 = E[y^2] = S_0\Delta\omega/\pi;$$

$$\sigma_{\dot{y}}^2 = E[\dot{y}^2] = S_0\omega_0^2\Delta\omega/\pi;$$

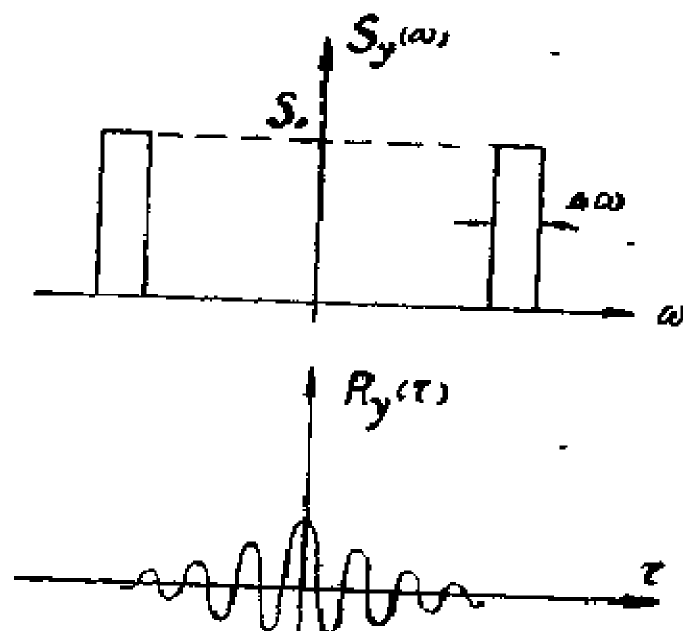


图 52

$$p(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}};$$

$$p(y\dot{y})=\frac{1}{2\pi\sigma_y\sigma_{\dot{y}}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{\sigma_y^2}+\frac{\dot{y}^2}{\sigma_{\dot{y}}^2}\right)}$$

$$=p(y)p(\dot{y})$$

2. 正穿越的平均频率

当随机变量以正斜率达到和超过 $y=a$ 时，就叫一次正穿越。在单位时间内可能出现正穿越的次数称为正穿越 $y=a$ 的平均频率。高斯窄带随机过程的正穿越 $y=a$ 的频率可按如下公式来计算：

$$\nu_a^+=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\sigma_{\dot{y}}}{\sigma_y}e^{-a^2/2\sigma_y^2}. \qquad (8\cdot19)$$

当 $a=0$ 时，

$$r_0^+ = \frac{1}{2\pi}\frac{\sigma_{\dot{y}}}{\sigma_y} \qquad (8\cdot20)$$

是正穿越 $y=0$ 的统计平均频率，它可以看作是该随机过程的平均频率。若是各态历经过程，也是沿时间轴的平均频率。

3. 峰值的概率密度函数

$$p_p(a) = \frac{a}{\sigma_y^2} e^{-a^2/2\sigma_y^2}, \quad 0\leqslant a<\infty。 \qquad (8\cdot21)$$

在随机抽样中，峰值超过 a 的概率为

$$P_p(Y_{max}>a) = \int_a^\infty p_p(a)da = e^{-a^2/2\sigma_y^2} \qquad (8\cdot22)$$

4. 极大值频率 就是随机变量达到极大值的频率。

$$\mu_y = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\sigma_{\ddot{y}}}{\sigma_{\dot{y}}}。 \qquad (8\cdot23)$$

当带宽足够窄时，极大值的频率与正穿越零的频率 r_0 是相同的。如果窄带过程的带宽不够窄，则极大值频率与正穿越零的频率不相等。

(二)窄带过程统计分析问题的解法

当判别好研究的窄带统计分析问题后，只要计算出随机变量及其导数的方差，一般都可用公式(8·15)～(8·23)计算所求的统计参数。在计算这些公式中的方差时，应先用第一章的方法求出系统的频率响应函数，再应用如下的公式来计算有关的功率谱密度

$$S_{\dot{y}}(\omega) = \omega^2 S_y(\omega), \qquad (8\cdot24)$$

$$S_{\ddot{y}}(\omega)=\omega^2 S_{\dot{y}}(\omega)=\omega^4 S_y(\omega).$$

例8·8 在图47所示的单自由度系统上，作用有谱密度为 S_0 的高斯白噪音，试计算系统输出响应的正穿越 a 的频率。

已知：m，k，c，$S_x(\omega)=S_0$，a，

求：　r^+。

解：　在例8·1中已经求得系统的频率响应函数为

$$H_{yx}(\omega)=\frac{1}{k-m\omega^2+jc\omega}. \qquad (1)$$

由此可算出输出的方差

$$\sigma_y^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{k-m\omega^2+jc\omega}\right|^2 S_0 d\omega$$

$$=\frac{S_0}{2kc}. \qquad (2)$$

计算 $\dot{y}(t)$ 对于激励 $x(t)$ 的频率响应函数

$$H_{\dot{y}x}(\omega)=j\omega H_{yx}(\omega)=\frac{j\omega}{k-m\omega^2+jc\omega}, \qquad (3)$$

于是有

$$\sigma_{\dot{y}}^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{j\omega}{k-m\omega^2+jc\omega}\right|^2 S_0 d\omega. \qquad (4)$$

应用标准积分公式(8·4)，可求出

$$\sigma_{\dot{y}}^2=\frac{S_0}{2mc}. \qquad (5)$$

将(2)，(5)代入公式(8·19)得

$$r_a^+=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\sigma_{\dot{y}}}{\sigma_y}e^{-a^2/2\sigma_y^2}$$

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3}{m}}\quad e^{\quad a^2kc/s_0}.$$

令 a 0，便可求出过程的平均频率

$$r_0^- = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3}{m}}\ .$$

例8·9 计算高斯窄带过程 $y(t)$ 中峰值超过 3σ 的概率，（σ_y 是标准差）。

已知：$p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}}$，$\sigma_y$。

求：$p_p(y_{max} > 3\sigma_y)$。

解：将 a $3\sigma_y$ 代入公式(8·22)得

$$p_p(y_{max} > 3\sigma_y) \quad e^{-a^2/2\sigma_y^2} = e^{\quad 9\sigma_y^2 \quad 2\sigma_y^2} = e^{\quad 4.5} \quad 0.011$$

由此可见，平均起来在100个峰中有一个超过 $3\sigma_y$ 值。

例8·10 设一高斯过程在下限频率 $\omega_1/2\pi$ 70.7 HZ，上限频率 $\omega_2/2\pi = 141.4HZ$，中心频率为 $100HZ$ 的倍频程带宽上谱密度不变。试计算其极大值频率以及正穿越零的频率（图53）。

已知：ω_1 141.4π，ω_2 282.8π

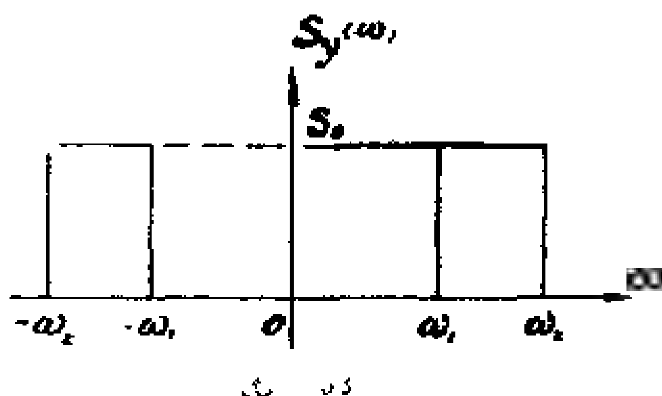


图 53

$$S_y(\omega)=\begin{cases}S_0, & |\omega_1|<|\omega|<|\omega_2|,\\ 0, & \text{其余。}\end{cases}$$

求： μ_y， $r^+_{y=0}$ 。

解： 计算随机变量及一、二阶导数的方差

$$\sigma_y^2=E[y^2]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_y(\omega)d\omega$$

$$=S_0(\omega_2-\omega_1)/\pi; \qquad (1)$$

$$\sigma_{\dot y}^2=E[\dot y^2]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2 S_y(\omega)d\omega$$

$$=\frac{1}{3\pi}S_0(\omega_2^3-\omega_1^3); \qquad (2)$$

$$\sigma_{\ddot y}^2=E[\ddot y^2]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega^4 S_y(\omega)d\omega$$

$$=\frac{1}{5\pi}S_0(\omega_2^5-\omega_1^5)。 \qquad (3)$$

将已知数据和(1)，(2)，(3)式代人公式(8·23)(8·20)得

$$\mu_y=\frac{1}{2\pi}\frac{\sigma_{\ddot y}}{\sigma_{\dot y}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3(\omega_2^5-\omega_1^5)}{5(\omega_2^3-\omega_1^3)}}=115\ (HZ);$$

$$r^+_{y=0}=\frac{1}{2\pi}\frac{\sigma_{\dot y}}{\sigma_y}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\omega_2^3-\omega_1^3}{3(\omega_2-\omega_1)}}=108(HZ);$$

可见局部极大值约比正穿越零的次数多出6.5%。

§8.5 随机响应的微分方程解法

(一)均值和互相关函数 由常系数微分方程

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots\cdots+a_{n-1}y=b_0x^{(m)}+b_1x^{(m-1)}+\cdots\cdots+b_{m-1}x \qquad (8\cdot25)$$

所描述的系统，其响应 $y(t)$ 可用卷积公式(2·4)表示为

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau. \qquad (2\cdot4)$$

有趣的是输出的均值和互相关函数也可表示为这种相同的形式，（见8.7式）

即 $$E_y=E[y(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)E[x(t-\tau)]d\tau, \quad (8\cdot26)$$

$$R_{xy}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\xi)R_x(\tau-\xi)d\xi; \qquad (8\cdot27)$$

其中系统的脉冲响应函数 $h(\tau)$ 可用第二章的方法来计算。由于 $\mu_y=E_y$，R_{xy} 与 $y(t)$ 的计算公式相似，因此如果我们分别以系统输入 $x(t)$ 的均值 $E[x(t)]$ 和自相关函数 $R_x(\tau)$ 代替方程(8·25)中的 $x(t)$，便可得到计算响应 $y(t)$ 的均值和自相关函数的微分方程：

$$a_0E_y^{(n)}+a_1E_y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}E_y=b_0E_x^{(m)}+b_1E_x^{(m-1)}+\cdots+b_{m-1}E_x; \quad (8\cdot28)$$

$$a_0R_{xy}^{(n)}(\tau)+a_1R_{xy}^{(n-1)}(\tau)+\cdots+a_{n-1}R_{xy}'(\tau)=b_0R_x^{(m)}(\tau)+b_1R_x^{(m-1)}(\tau)+\cdots+b_{m-1}R_x(\tau).$$

(8·29)

此两方程的特解就是平稳随机响应的均值和互相关函数。

(二)响应的自相关函数 若用互相关函数来表示自相关

函数时，也可得到与公式(2·4)相似的关系，

$$R_y(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\xi)R_{xy}(\tau+\xi)d\xi$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}h(-\xi)R_{xy}(\tau-\xi)d\xi. \qquad (8\cdot30)$$

但是(2·4)式中的$h(\tau)$和(8·30)式中的$h(-\tau)$不同，后者是前者改变时间前进方向后得到的。此时把$h(-\tau)$称为$h(\tau)$的共轭函数，与$h(-\tau)$相应的系统称为原系统的共轭系统。描述共轭系统的微分方程叫做原微分方程的共轭微分方程。因此只要把方程(8·25)作$t'=-t$的变量代换，就可得其共轭微分方程。再将$R_{xy}(\tau)$代替共轭方程中的$x(t')$，便可得到计算系统响应的自相关函数$R_y(\tau)$的微分方程：

$$(-1)^n a_0 R_y^{(n)}(\tau)+(-1)^{n-1}a_1 R_y^{(n-1)}(\tau)+\cdots+a_{n-1}R_y(\tau)$$

$$=(-1)^m b_0 R_{xy}^{(m)}(\tau)+(-1)^{m-1}b_1 R_{xy}^{(m-1)}(\tau)$$

$$+\cdots+b_{m-1}R_{xy}(\tau). \qquad (8\cdot31)$$

此方程的特解就是稳态输出的自相关函数。

例8·10 一物理系统的运动微分方程为

$$Y'(t)+aY(t)=aX(t). \qquad (1)$$

设输出$X(t)$是平稳的随机过程，且$E_x=\mu_x=S_0$，$R_x=S_0\delta(\tau)$，试求随机输出响应$Y(t)$的均值，自相关函数和互相关函数。

解： 根据公式(8·28)写出均值应满足的微分方程

$$E'_y(t)+aE_y(t)=aE_x=aS_0 \qquad (2)$$

用待定系数法可求出此方程的特解$E_y(t)=A$。

即 $aA=aS_0$，

$$A = S_0,$$

则 $$E_y = S_0. \tag{3}$$

根据(8·29)式写出互相关函数所满足的微分方程为

$$R'_{xy}(\tau) + aR_{xy}(\tau) = aR_x(\tau) = aS_0\delta(\tau). \tag{4}$$

此方程的等效方程为

$$\left.\begin{aligned} &R'_{xy}(\tau) + aR_{xy}(\tau) = 0, \\ &R_{xy}(0) = aS_0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

由此可解出

$$R_{xy}(\tau) = aS_0 e^{-a\tau}. \tag{6}$$

根据(8·31)式写出自相关函数应满足的微分方程是：

$$R'_y(\tau) + aR_y(\tau) = aR_{xy}(\tau) = a^2S_0e^{-a\tau} \tag{7}$$

应用待定系数法求此方程的特解

设 $R_y(\tau) = Ae^{-a\tau}$， $R'_y(\tau) = -aAe^{-a\tau}$； (8)

将它们代入(7)式得

$$aAe^{-a\tau} + aAe^{-a\tau} = a^2S_0e^{-a\tau}, \tag{9}$$

由此解出

$$A = \frac{aS_0}{2}. \tag{10}$$

将(10)式代入(8)式，得

$$R_y(\tau) = Ae^{-a\tau} = \frac{aS_0}{2}e^{-a\tau}, \quad (\tau \geq 0) \tag{11}$$

由于自相关函数是偶函数，所以

$$R_y(\tau) = \frac{aS_0}{2}e^{-a|\tau|}, \quad (-\infty < \tau < \infty) \tag{12}$$

习　题　八

8—1　图8·1所示任一单输入、输出系统中，若已知输出的自功率谱密度$S_y(\omega)$和输入，输出的互功率谱密度$S_{xy}(\omega)$，$S_{yx}(\omega)$，试说明如何确定输入自谱密度$S_x(\omega)$和系统的频率响应函数$H(\omega)$，并指出这些计算公式有什么限制。

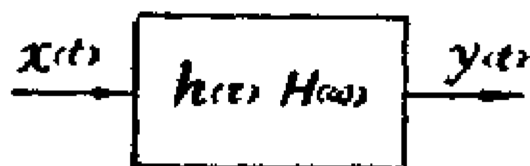


图　8·1

8—2　RC低通滤波器的时间常数$K=RC>0$，它的脉冲响应函数为

$$h(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{K}e^{-t/K}, & K>0,\ t\geqslant 0;\\ 0 & t<0.\end{cases}$$

设输入是功率谱密度为$G_x(f)=a$的白噪音，试求输出的功率谱密度，均方值与自相关函数。

8—3　在图8·3所示系统中，若激振力的谱密度是$S_f(\omega)=S_0$的理想白噪音，试求小车的平均位移$E[x(t)]$，均方位移$E[x^2(t)]$，并确定输入和输出的自相关函数$R_f(\tau)$，$R_x(\tau)$以及输出的自谱密度函数$S_x(\omega)$。

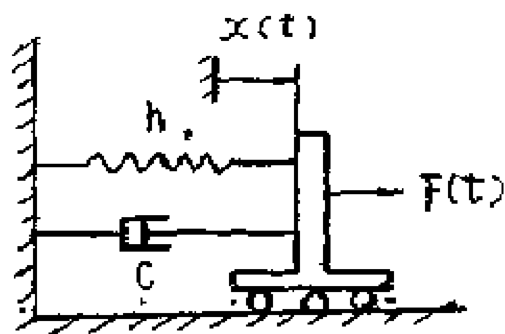


图　8·3

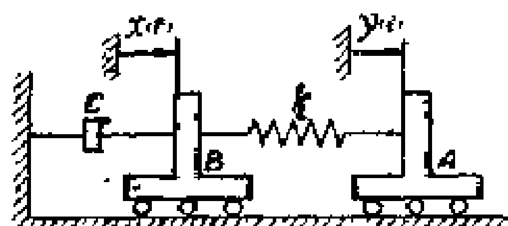


图　8·4

8—4　在图8·4所示系统中。小车 A 位移输入的功率谱密度是 $G_y(\omega)=a$ 的白噪音谱，试求小车 B 的位移输出功率谱密度 $S_x(\omega)$、自相关函数 $R_x(\tau)$ 和输出的均方值 ψ_x^2。

8—5　图8·5所示系统在随机变力作用下发生振动，$x(t)$ 表示系统的位移响应。若激振力的输入谱密度为

$$S_F(\omega)=\frac{S_0}{1+\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}},$$

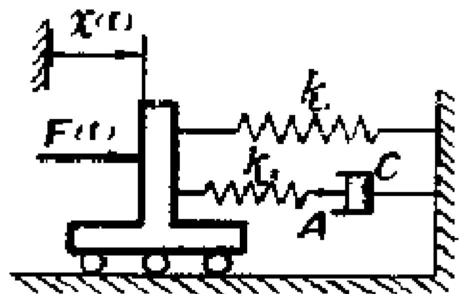


图 8·5

试求位移响应的均方值 $E[x^2]$。

提示：(a) 取弹簧 k_2 与阻尼器连接点 A 的座标为附加座标 $y(t)$，分别列出 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的运动微分方程，然后再消去 $y(t)$。

(b) 利用标准积分公式。

8—6　若输入某系统的随机激励 $X(t)$ 的自功率谱密度为 $S_x(f)$，而输出的随机振动过程可表示为

$$Y(t)=X(t)-nX(t-T)+\frac{n(n-1)}{2!}X(t-2T)+\cdots+(-1)^n X(t-nT),$$

试求输出的功率谱密度。

8—7　已知某系统输入的随机激励 $X(t)$ 的自谱密度为 $S_x(f)$，而输出的随机振动过程可表示为

$$Y(t)=\frac{1}{2\tau}\int_{t-\tau}^{t+\tau}X(a)d(a),$$

试求输出的自谱密度。

8—8　假设有一个正弦波作用于题 8—2 那样的 RC 低通

滤波器。试求输出的自功率谱密度函数，输出的均方值和输出的自相关函数。

提示：在例7·5中已求出正弦波$x(t)=\sin(\omega_0 t+\alpha)$的自功率谱密度函数

$$S_x(\omega)=\frac{\pi a}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$$

其自谱密度曲线如图8·8所示。

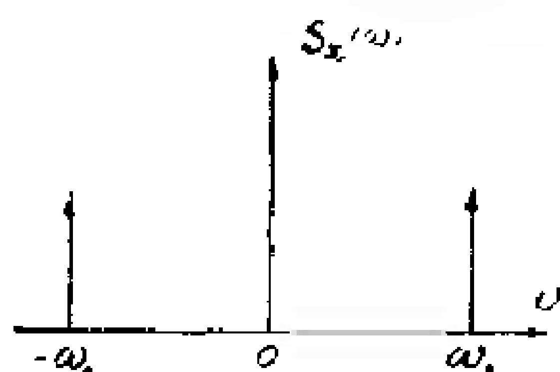


图 8·8

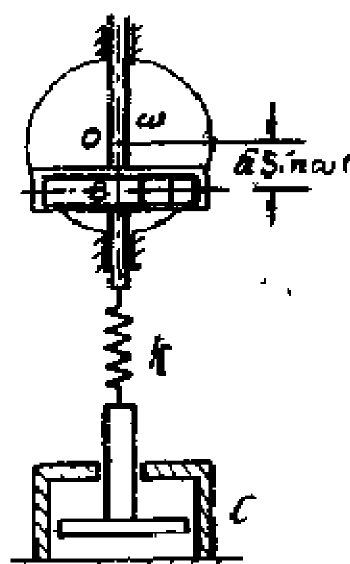


图 8·9

8—9刚度为$k=0.4N/cm$的弹簧上端随图8·9所示滑道连杆机构作简谐运动，其规律为$OB=a\sin\omega t$。该弹簧的下端与阻尼器的活塞相联。已知阻尼器的阻尼系数$c=0.05(N\cdot S/cm)$偏心距$a=2cm$，圆盘的角速度$\omega=7(1/sec)$。在不计活塞重量的条件下，试求活塞运动输出的自功率谱密度函数，均方值和自相关函数。

8—10 在图8·10所示的振动系统中，若弹簧端点的位移输入$y(t)$的功率谱是理想白噪音谱，试求质量m位移输出的功率谱，均方值和自相关函数。

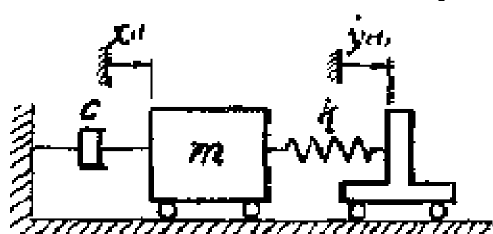


图 8·10

8—11 在图 8·11 所示系统中，若AB杆端点受到白激振力谱密度$S(\omega)=S_0$，试求集中质量m位移输出响应的谱密度和均方值。已知a，b，m，k，c等参数，不计杆的质量。

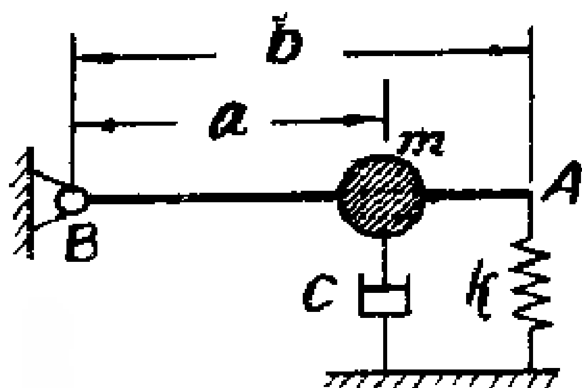


图 8·11

8—12 在图 8·12 所示的振动系统中，已知m，k，c，a；若作用在质量上的激振力的功率谱密度函数为

$$S_F(\omega)=\frac{S_0\omega_0^2}{\omega^2+\omega_0^2},$$

试计算质量位移的均方值。

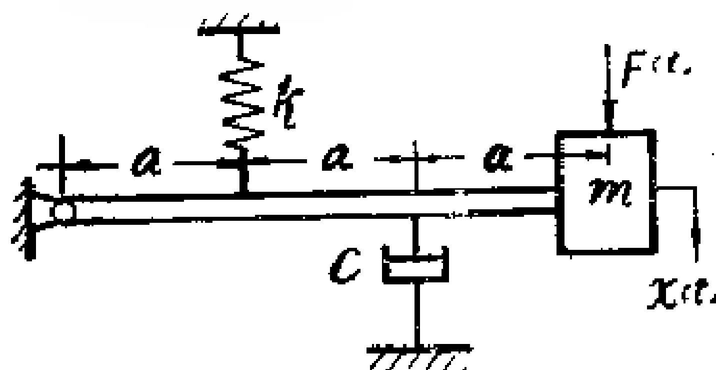


图 8·12

8—13 长为l的刚性杆OA，一端铰接在固定支座上，另一端悬于刚度为K_2的弹簧下端。在杆的中点用刚度为K_1的弹簧悬挂着质量为m的重块。设作用在重块上的随机变力$F(t)$的谱密度$S_F(\omega)=S_0$是理想白噪声谱。试求重物位移输出的功率谱密度，自相关函数和均方值。

8—14 在图 8·14 所示的系统中，作用在质量上的激振力输入$F(t)$的谱密度$S_F(f)=S_0$是理想白噪声谱。已知k，c，J、R、m、S_0时，试求质量的位移输出$y(t)$的功率谱

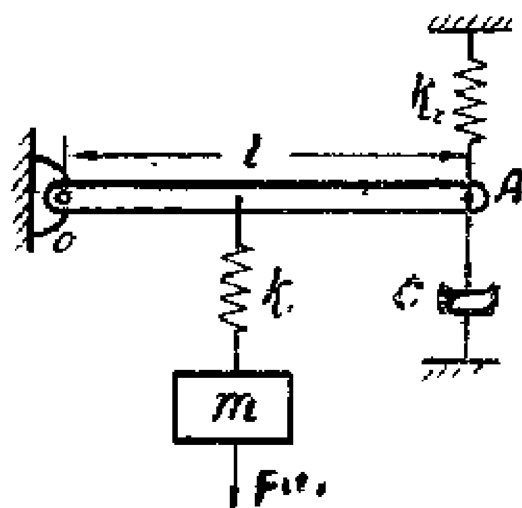


图 8·13

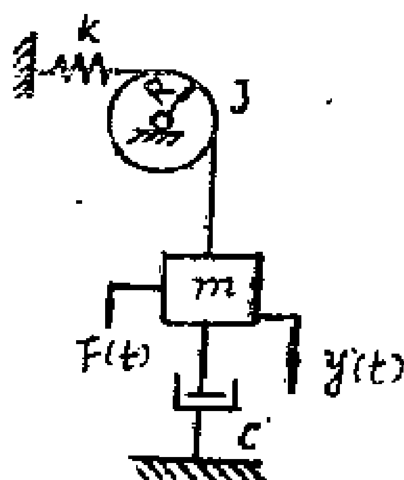
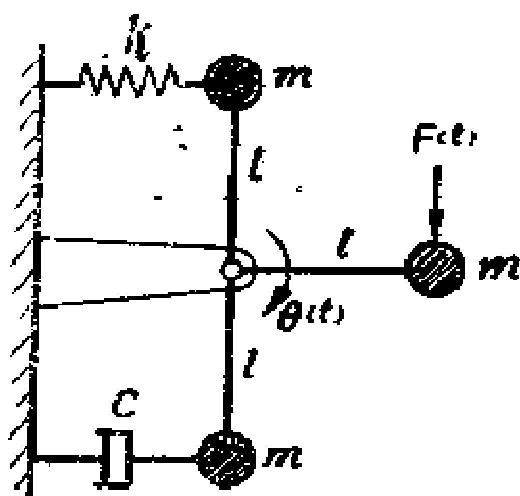


图 8·14

和系统的平均动能。

8—15 在图8·15所示的系统中设激振力 $F(t)$的谱密度 $S_F(\omega)=s_0$ 是理想白噪声谱。已知m，k，c，l时，试求T型杆转角输出的谱密度和系统的平均动能。



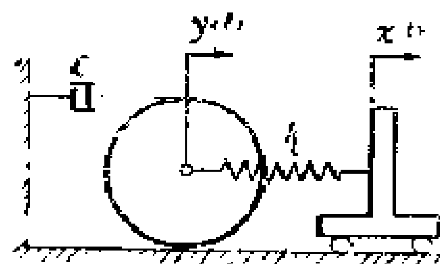


图 8·16

图 8·15

8—16 图 8·16 所示振动系统的圆盘，可在水平直线轨道上滚动而不滑动。设弹簧端点位移输入 $x(t)$的功率谱是理想的白噪音$S_x(\omega)=s_0$，试求轮子中心位移输出$y(t)$的功率谱密度，均方值和自相关函数。

8—17 在水平直线轨道上滚动的圆盘，用弹簧 k_2 和阻

尼c器与固定面相联，如图8·17所示。设系统的输入是弹簧k_1端点的位移$x(t)$，其输入功率谱是理想的白噪音谱$S_x(\omega)=S_0$。已知$k_2=2k_1=2k$，$R=2r$，c。圆盘的总质量M和绕中心的转动惯量$J=\frac{1}{2}MR^2$。试求轮心位移输出$y(t)$的功率谱密度，均方值和自相关函数。

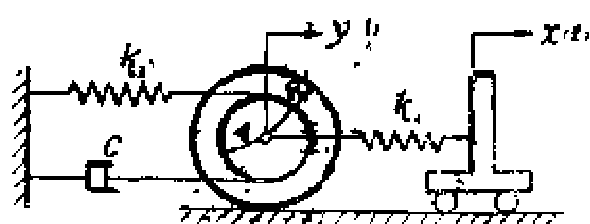


图 8-17

8—18 图8·18中在水平面内滚动的两个轮子可分别绕刚性杆上A、B两点自由转动，在杆的A点用弹簧和阻尼器与固定面相联。设在B点作用的干扰力$F(t)$谱密度是白噪音谱$S_f(\omega)=S_0$，并已知弹簧刚度系数为k，阻尼器阻尼为c，两轮的质量$M_B=2M_A=2M$，两轮的半径$R_B=2R_A=2R$，试求轮心A位移输出的谱密度，均方值和自相关函数。

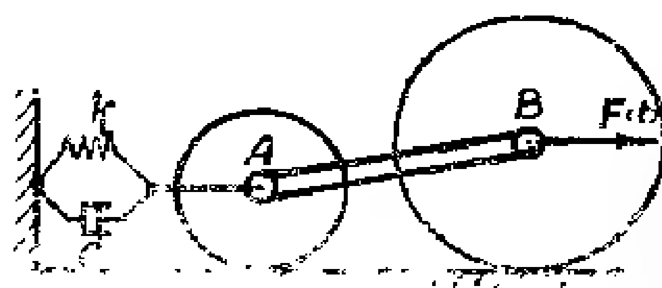


图 8-18

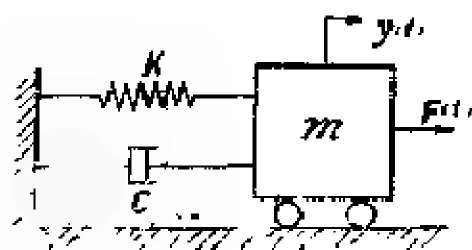


图 8·19

8—19 图8·19所示的单自由度振子，受到谱密度为

$$S_f(\omega)=\frac{S_0\omega_0^2}{\omega^2+\omega_0^2}$$

的激振力$F(t)$所激励而振动已知m、k、c、S_0、ω_0，试求系统的输出均方值。

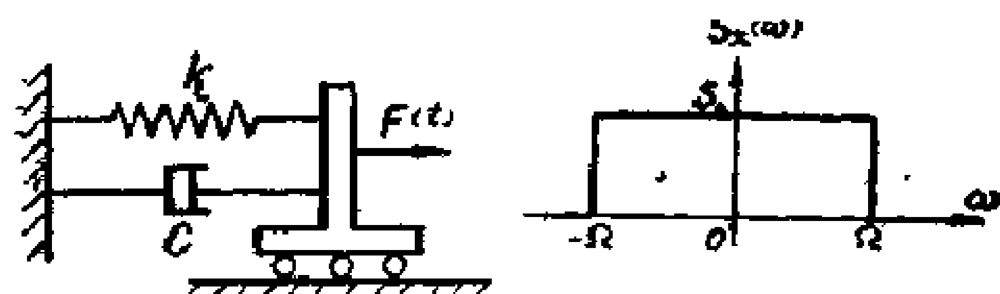


图 8·20

8—20 在图 8·20 所示的振动系统中，若激励是有限带宽白噪音谱

$$S_x(\omega)\begin{cases} S, & -\Omega\leqslant\omega\leqslant\Omega, \\ 0, & 其余\omega . \end{cases}$$

试求输出的平均位移$E[x]$和均方位移$E[x^2]$。

8—21 有阻尼的单自由度质量弹簧系统在图 8·21 所示的谱密度激振力（有限带宽激振力）作用下产生随机振动，若 $\xi=0.05$，$\omega_c=\omega_0/2$，试给出位移输出的自谱密度曲线（ω_0是系统的固有频率）。

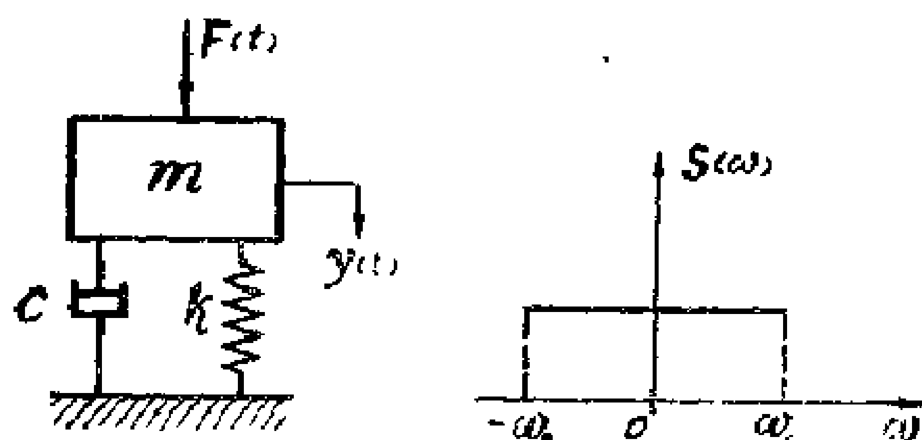


图 8·21

8—22 在图8·22所示振动系统中，若作用在质量m上的激振力谱密度是有限带宽白噪音谱

$$S_F(\omega)=\begin{cases}S_0, & \Omega\leqslant\omega\leqslant\Omega_1\\ 0, & \text{其余}\ \omega.\end{cases}$$

已知 k, c, m, S_0, 试求无质量杆转角输出的谱密度。

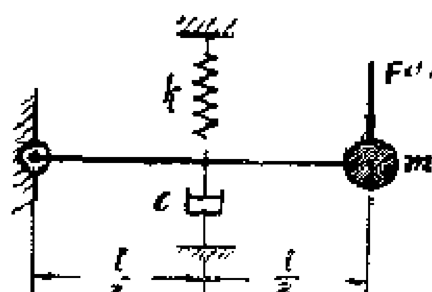


图 8·22

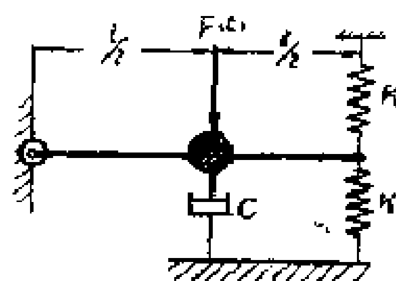


图 8·23

8—23 在图8·23中，已知m, k, c和激振力$F(t)$输入的有限带宽白噪音谱：

$$S_F(\omega)=\begin{cases}S_0, & -\Omega\leqslant\omega\leqslant\Omega;\\ 0, & \text{其余}\ \omega.\end{cases}$$

试求无质量杆转角输出的自谱密度。

8—24 在图8·24所示的系统中，$x(t)$ 是输入的基础位移，输出是质量的绝对位移 $y(t)$。若基础的位移输入是理想的白噪音谱，其单边功率谱密度 $G_x(f)=a$，试求输出的自相关函数，功率谱密度和均方值。

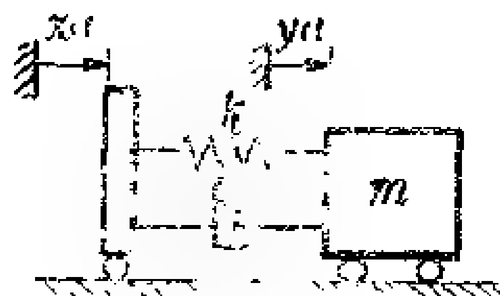


图 8·24

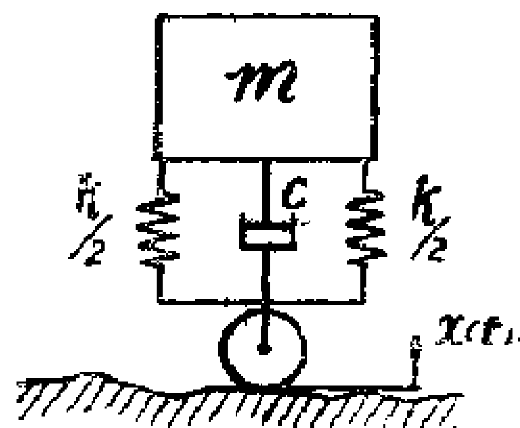


图 8·25

8－25　图8·25是一个车辆的单自由度简化模型。已知系统的固有频率 $f_0=25H_z$，阻尼比 $\xi=0.1$，输入的加速度功率谱是 $S_x=0.2g^2/H_z$ 的白噪音谱，试计算隔振装置需要的最小活动间隙。

注：(1) g—重力加速度。

(2)在大数情况下活动间隙应大于弹簧动变形均方根值的三倍。

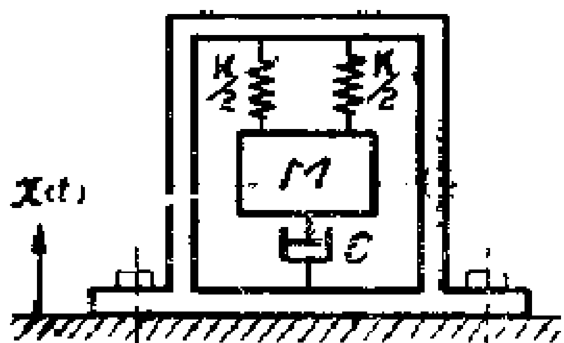


图　8·26

8—26　质量 M 用阻尼系数为 c 的阻尼器和两根刚度为 $K/2$ 的弹簧悬挂于壳体内。设固定壳体的机座位移输入 $x(t)$ 的谱密度是理想白噪音谱 $S_x(\omega)=S_0$，试求质量位移输出的功率谱密度，均方值和自相关函数。

8—27　图8·25是汽车的单自由度简化模型。已知悬挂弹簧的刚度 K 和减振器的阻尼 c，以及汽车的质量 M。当路面位移输入 $x(t)$ 具有白噪音谱 $S_x(\omega)=S_0$ 时，试求车身位移输出 $y(t)$ 的功率谱密度，均方值和自相关函数。

8—28　在图8·28所示的质量弹簧系统中，设基础输入的加速度是常量 a 迭加一个谱密度为 S_0 的白噪音过程，即 $\ddot{x}(t)=a+b(t)$，其中

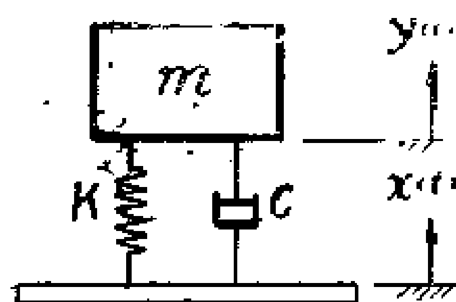


图　8·28

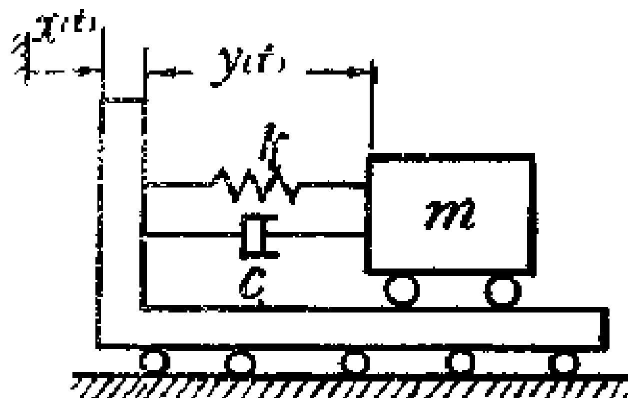


图　8·29

$b(t)$是谱密度为S_0的白噪音过程。假设由常量输入部分所引起的瞬态响应已随时间消失，试求弹簧力的均方根值。

8-29　质量m用弹簧k，阻尼器c与运动车辆相连(图8·29)。$x(t)$表示车身的水平运动，$y(t)$表示质量m相对于车身的水平运动，如图8.29所示。若车身的加速度输入是理想的白噪音谱，即$S_{\ddot{x}}(f)=S_0$，试确定相对位移输出$y(t)$的均方值$E[y^2]$。

8-30　某系统输入的时间历程可近似地表示成图8·30所示的图形，它可视为大小是a、b，且以等距离T分布的一系列δ函数。系统的输出响应时间历程也可近似的表为：$y(t)=c\sin\Omega(t-t_0)\sin\frac{2\pi}{T}(t-t_0)$其中$c$、$\Omega$、$T$及$t_0$皆为常数，试确定此系统的频率响应函数。

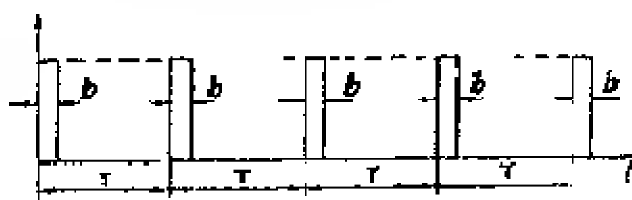


图　8·30

提示：(1)计算$x(t)$的富氏级数表达式；

(2)计算系统的输入谱密度$S(\omega)$；

(3)计算输出谱密度。

8—31　设图47所示单自由度系统的激振力为$F(t)$，其输入的功率谱是理想白噪音谱，已知S_0、M、K、C时，试求质量的速度输出的自相关函数$R_{\dot{x}}(\tau)$，均方值$\psi_{\dot{x}}^2$，质量位移$x(t)$和速度$\dot{x}(t)$的互相关函数$R_{x\dot{x}}(\tau)$，以及相关系数$\rho_{x\dot{x}}$。

8—32　在图8·21中，已知m，k，c和基础位移$x(t)$的功率谱密度$S_x(\omega)=S_0$，试求质量加速度输出的自相关函数$R_{\ddot{y}}(\tau)$，均方值$\psi_{\ddot{y}}^2$和功率谱密度$S_{\ddot{y}}(\omega)$。

8—33　无质量的T形杆可绕O点转动，杆的三个端点分

别与质量m，阻尼器c和弹簧k相联，如图8·33所示。设作用在质量m上的水平激振力谱密度$S_F(\omega)=S_0$，试求转角输出$\varphi(t)$的功率谱密度，均方值，和自相关函数。

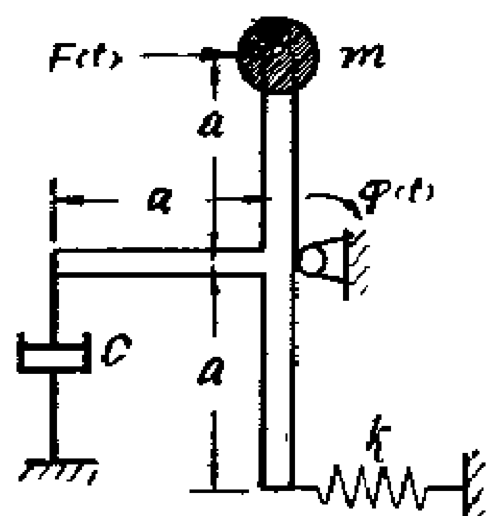


图 8·33

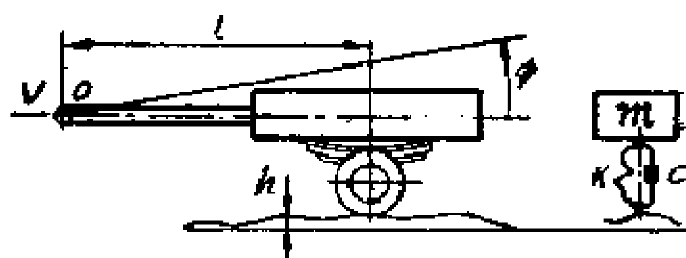


图 8·34

8—34 图8·34是一个等速前进的双轮拖车，已知拖车对联接点的转动惯量为J_0，悬挂的刚度和阻尼系数分别为K、C；设地面位移输入$y(t)$的自相关函数为$R_y(\tau)=96.40e^{-0.0627|\tau|}\cos(0.196\tau)$试求对$O$点转角输出的功率谱密度和均方值。

8—35 对于平均值为零，方差为σ_x^2的各态历经高斯窄带随机过程$x(t)$，试确定：

(1)$x(t)$处于$x=\pm\sigma_x$之外所占的时间比例；

(2)随机抽选的一个峰值，其大小超过σ的概率；

(3)全部峰值的平均值；

(4)全部峰值中有1%的峰值要超过的这个值.

8—36 作用在有阻尼质量—弹簧系统上的激振力是一个平稳的高斯过程，其谱密度是

$$S_x(\omega)=\frac{S_0}{1+\omega^2/\omega_0^2}\cdot$$

试求质量位移输出响应各统计特性的表达式：

（1）正穿越 a 的平均频率；

（2）峰值分布的概率密度函数；

（3）输出 $y(t)$ 出现极大值的平均频率。

8—37　设有一平稳随机过程 $y(t)$，其联合概率密度函数为

$$p(y\dot{y})=\begin{cases}\dfrac{1}{4y_0\dot{y}_0} & \text{（常数）}, \quad y_0\leqslant y\leqslant y_0; \\ & \quad -\dot{y}_0\leqslant \dot{y}\leqslant \dot{y}_0. \\ 0 & , \quad \text{其他。}\end{cases}$$

试计算其统计平均频率 ν_a^+ 以及峰值概率密度函数 $p_a(a)$。

8—38　设图 8·38 所示振动系统的输入是平稳高斯白噪音过程的激振力 $F(t)$，已知 m，k_1，k_2，c 试求质量 m 的位移输出统计平均频率 ν_0^+ 以及极大值的频率 μ_0。

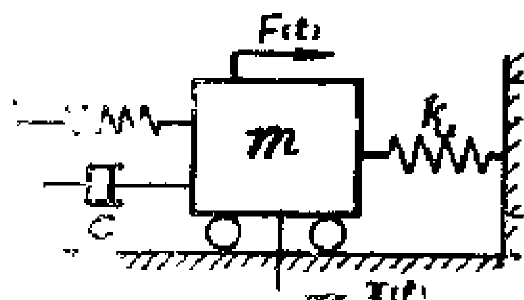


图　8·38

8—39　在题 8·38 中，若输入激振力的谱密度 $S_F(\omega)=\dfrac{S_0}{1+\omega^2/\omega_0^2}$，再求位移输出的统计平均频率 ν_0^+ 以及极大值的频率 μ_0。

8—40　在图 8·40 中，车辆悬挂系统的自然频率为 $f=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}=1.5H_z$，阻尼比为 $\xi=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{C}{\sqrt{mk}}=0.1$，路面的单边空间谱密度为 $100mm^2$/周/米（常值）当车辆以速度 $V=30Km/h$ 和 $V=100Km/h$ 行驶时，试求车辆均方根位移响应的估计。

提示：①空间谱密度$S_y(\Omega)$与时间谱密度$S_y(f)$的关系：

$S_y(f) = \frac{1}{V} S_y(\Omega)$；

②均方响应的近似估计公式（$\mu_x = 0$时）：

$$E[x^2] = \sigma_x^2 \approx 2 \begin{pmatrix} S_x(\omega)\text{在}p\text{区} \\ \text{域的平均值} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} H(\omega) \\ \text{的峰值} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{均方带} \\ \text{宽 } H_z \end{pmatrix}；\quad \text{均方带宽} = \pi\xi p。$$

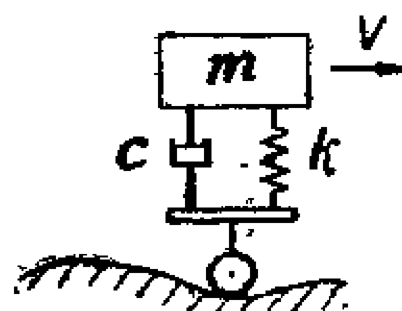


图 8-40

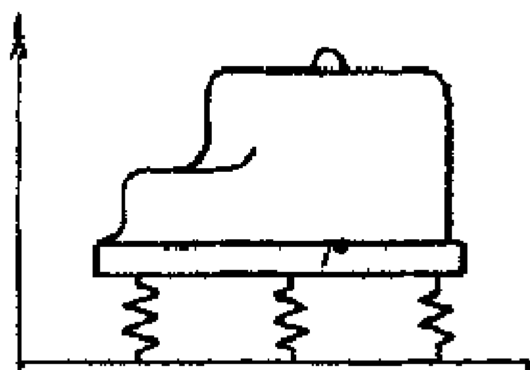


图 8-41

8—41　图8-41表示飞机上一个仪器的外壳。在试验中，当正弦振动超过2.5g的极限时，此外壳就发生了破坏。现在它受一频带为1～2000H_z，加速度单边谱为0.63g^2/H_z的白噪声所激励，为了使仪器及外壳在此激励下免遭损坏，试求隔振装置所需的静变形Δ_{st}。已知无量纲阻尼系数$\xi = 0.05$。

提示：①在小阻尼情况下$p' = p\sqrt{1-\xi^2} \approx p$

②用正弦振动试验的加速度结果去等价于随机振动环境的加速度均方值，即由$\sqrt{\psi_x^2} = 2.5g$来决定p和$\Delta_{st} = \frac{g}{p^2}$。

8—42　对某仪器进行谐振激励试验时，用慢步扫频的方法使仪器受到一定频率范围的激励。试验时用一个方向的加速度传感器测量各对应频率的加速度及位移，获得如表8·1所示的结果。试用列表法求：

（1）仪器受一个$0.01g^2/H_z$的匀加速度功率谱密度激励后，响应的均方根值。

（2）此仪器受到表8·1所示非匀加速度的功率谱激励后响应均方根值。

表8·1

f, H_z	60	125	175	210	235	275	326	375	450	550	700	900
$\|H(f_z)\|$	1.3	1.8	2.6	2.8	1.7	0.5	5.7	1.1	0.6	0.4	0.2	0.1
$\sqrt{S(f)}$	0.037	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.030	0.070	0.055

第　九　章

多输入与多输出随机振动

（多自由度系统）

内　容　提　要

§9.1　多输入与多输出随机振动问题的特点

在工程实际中具有多输入与多输出的系统一般都是多自由度系统，因此也可把这种系统的振动问题说成是多自由度随机振动问题。

当用矩阵来研究这类问题时，可使公式的表达和书写变得简洁，而且用矩阵表示的输入与输出之间的关系和单输入与单输出之间的关系相似。因此在处理这类问题时常要进行矩阵运算。对于自由度较多的复杂问题的计算最好能借助于电子计算机来处理。

根据(4.14)和(4.6)式，多输入与多输出系统的动态特性可用频率响应矩阵$H(\omega)$和脉冲响应矩阵$h(\tau)$来表示，即

$$H(\omega)=[H_{kj}]=\begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega)\cdots H_{1m}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega)\cdots H_{2m}(\omega) \\ \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots \\ H_{n1}(\omega) & H_{n2}(\omega)\cdots H_{nm}(\omega) \end{bmatrix}, \tag{9.1}$$

$$
h(\tau) = [h_{kl}(\tau)] = \begin{bmatrix} h_{11}(\tau) & h_{12}(\tau) & \cdots & h_{1m}(\tau) \\ h_{21}(\tau) & h_{22}(\tau) & \cdots & h_{2m}(\tau) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{n1}(\tau) & h_{n2}(\tau) & \cdots & h_{nm}(\tau) \end{bmatrix}。 \tag{9.2}
$$

将系统的m个输入 $x_1(t)$，$x_2(t)\cdots$，$x_m(t)$ 表示成如下的列阵：

$$
X(t) = \{x_l(t)\} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{bmatrix}, \tag{9.3}
$$

由这m个输入可算出$m\times m$个相关函数，它们可排成输入的相关函数矩阵：

$$
R_{xx}(\tau) = \begin{bmatrix} R_{x_1x_1}(\tau) & R_{x_1x_2}(\tau) & \cdots & R_{x_1x_m}(\tau) \\ R_{x_2x_1}(\tau) & R_{x_2x_2}(\tau) & \cdots & R_{x_2x_m}(\tau) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_{x_mx_1}(\tau) & R_{x_mx_2}(\tau) & \cdots & R_{x_mx_m}(\tau) \end{bmatrix}, \tag{9.4}
$$

其中 $R_{x_kx_l}(\tau) = E[x_k(\tau)\cdot x_l(t+\tau)]$ $k,l = 1,2,3,\cdots,m$。则（9,4）可表示为

$R_{xx}(\tau) = E[x(\tau)\cdot x^T(t+\tau)]$，

利用公式(2.1)，由(9.2)和(9.3)式可求出n个输出：

$$
y_k(t) = \sum_{l=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} h_{kl}(\tau)x_l(t-\tau)d\tau,
$$

$k=1,2,3\cdots,m$。

或写成矩阵形式：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)X(t-\tau)\,d\tau, \qquad (9.5)$$

对此式进行转置可得

$$y^T(t)=\int_{-\infty}^{\infty}X^T(t-\tau)h^T(\tau)d\tau, \qquad (9.6)$$

其中

$$y(t)=\{y_k(t)\}=\begin{Bmatrix} y_1(t)\\ y_2(t)\\ \vdots\\ y_n(t)\end{Bmatrix} \qquad (9.7)$$

是输出列阵。与此 n 个输出有关的自相关函数和互相关函数构成如下的输出相关矩阵：

$$R_{yy}(\tau)=\begin{bmatrix} R_{y_1y_1}(\tau) & R_{y_1y_2}(\tau) & \cdots & R_{y_1y_n}(\tau)\\ R_{y_2y_1}(\tau) & R_{y_2y_2}(\tau) & \cdots & R_{y_2y_n}(\tau)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ R_{y_ny_1}(\tau) & R_{y_ny_2}(\tau) & \cdots & R_{y_ny_n}(\tau)\end{bmatrix}, \qquad (9.8)$$

其中 $R_{y_ky_l}(\tau)=E[y_k(\tau)y_l(t+\tau)]$，$k,l=1,2,3,\cdots,n$。

则(9.8)式又可表为 $R_{yy}(\tau)=E[y(\tau)\cdot y^T(t+\tau)]$

对应于(9.4)和(9.8)可写出输入谱密度矩阵 $S_{xx}(\omega)$ 和输出谱密度矩阵 $S_{yy}(\omega)$ 如下：

$$S_{xx}(\omega)=\begin{bmatrix} S_{x_1x_1}(\omega) & S_{x_1x_2}(\omega)\cdots S_{x_1x_m}(\omega)\\ S_{x_2x_1}(\omega) & S_{x_2x_2}(\omega)\cdots S_{x_2x_m}(\omega)\\ \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots\\ S_{x_mx_1}(\omega) & S_{x_mx_2}(\omega)\cdots S_{x_mx_m}(\omega)\end{bmatrix}, \qquad (9.9)$$

$$
S_{yy}(\omega)=\begin{bmatrix} S_{y_1y_1}(\omega) & S_{y_1y_2}(\omega) & \cdots & S_{y_1y_n}(\omega) \\ S_{y_2y_1}(\omega) & S_{y_2y_2}(\omega) & \cdots & S_{y_2y_n}(\omega) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{y_ny_1}(\omega) & S_{y_ny_2}(\omega) & \cdots & S_{y_ny_n}(\omega) \end{bmatrix},
\tag{9.10}
$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
S_{x_kx_l}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{x_kx_l}(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau\,; \\
S_{y_ky_l}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{y_ky_l}(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau.
\end{aligned}\right\}
\tag{9.11}
$$

则(9.9)和(9.10)两式可表为

$$
\left.\begin{aligned}
S_{xx}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau\,; \\
S_{yy}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{yy}(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau.
\end{aligned}\right\}
\tag{9.12}
$$

最后根据输入和输出两个列矩阵(9.3)和(9.7)，可写出输入输出的互相关矩阵 $R_{xy}(\tau)$ 和互谱密度矩阵 $S_{xy}(\tau)$：

$$
R_{xy}(\tau)=\begin{bmatrix} R_{x_1y_1}(\tau) & R_{x_1y_2}(\tau) & \cdots & R_{x_1y_n}(\tau) \\ R_{x_2y_1}(\tau) & R_{x_2y_2}(\tau) & \cdots & R_{x_2y_n}(\tau) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_{x_my_1}(\tau) & R_{x_my_2}(\tau) & \cdots & R_{x_my_n}(\tau) \end{bmatrix},
\tag{9.13}
$$

$$S_{xy}(\omega)=\begin{bmatrix} S_{x_1y_1}(\omega) & S_{x_1y_2}(\omega)\cdots & S_{x_1y_n}(\omega) \\ S_{x_2y_1}(\omega) & S_{x_2y_2}(\omega)\cdots & S_{x_2y_n}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ S_{x_my_1}(\omega) & S_{x_my_2}(\omega)\cdots & S_{x_my_n}(\omega) \end{bmatrix},$$

(9.14)

§9.2 多输入、多输出线性系统随机激励和响随的关系

1. 均值

$$\mu_y=H(o)\mu_x, \qquad (9.15)$$

式中

$$\mu_y=\begin{bmatrix}\mu_{y_1}\\ \mu_{y_2}\\ \vdots\\ \mu_{y_n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E[y_1(t)]\\ E[y_2(t)]\\ \vdots\\ E[y_n(t)]\end{bmatrix},$$

$$\mu_x=\begin{bmatrix}\mu_{x_1}\\ \mu_{x_2}\\ \vdots\\ \mu_{x_m}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E[x_1(t)]\\ E[x_2(t)]\\ \vdots\\ E[x_m(t)]\end{bmatrix}.$$

是输入和输出的均值列阵。

2. 输出相关矩阵

$$R_{yy}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\lambda_1)\int_{-\infty}^{\infty}R_{xx}(\tau+\lambda_1-\lambda_2)\times h^T(\lambda_2)\,d\lambda_2\,d\lambda_1, \qquad (9.16)$$

式中 $h^T(\tau)$表示脉冲响应矩阵(9.2)的转置矩阵（以下相同）。

3. 输入与输出的互相关函数。

$$R_{xy}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}R_{xx}(\tau-\lambda)h^{T}(\lambda)d\lambda. \qquad (9.17)$$

4. 输出谱密度矩阵

$$S_{yy}(\omega)=H^{*}(\omega)S_{xx}(\omega)H^{T}(\omega), \qquad (9.18)$$

式中 $H^{T}(\omega)$是频率响应矩阵的转置矩阵；

$H^{*}(\omega)$是频率响应矩阵的共轭矩阵。

若 $H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$,

则 $H^{*}(\omega)=H(-\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{j\omega\tau}d\tau$.

5. 输入，输出互谱密度矩阵

$$S_{xy}(\omega)=S_{xx}(\omega)H^{T}(\omega) \qquad (9.19)$$

如果已经确定了 $S_{xx}(\omega)$ 和 $S_{xy}(\omega)$ 则系统的频率响应矩阵可由下式来确定

$$H^{T}(\omega)=S_{xx}^{-1}(\omega)S_{xy}(\omega). \qquad (9.20)$$

6. 谱相干函数 在互不相关的多输入单输出情况下第 i 个输入与输出之间的谱相干函数。

$$\gamma_{iy}^{2}(f)=\frac{|S_{iy}(f)|^{2}}{S_{i}(f)S_{y}(f)}=\frac{|H_{i}(f)|^{2}S_{i}(f)}{S_{y}(f)},$$

且有 $$\sum_{i=1}^{n}\gamma_{iy}^{2}(f)=1.$$

§9.3 随机振动响应的计算

解多输入，输出随机振动问题时，除注意矩阵运算外，

具体步骤与单输入问题相同，可简略的归纳成如下几点：

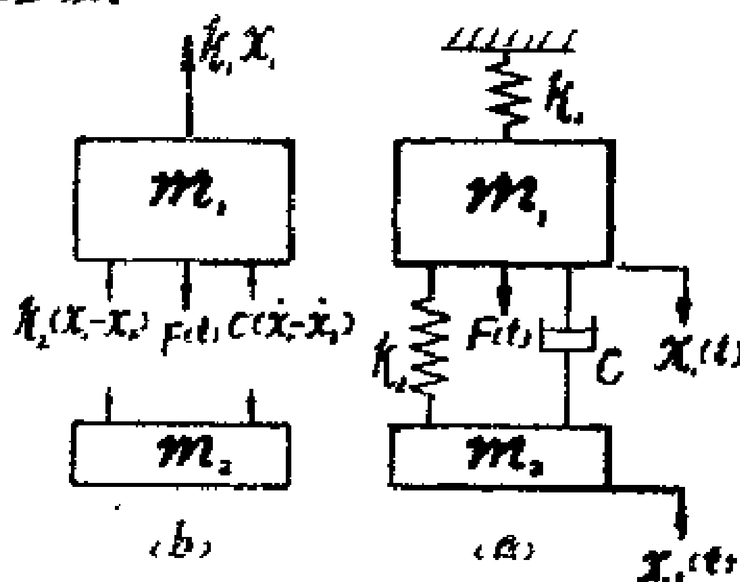
（1） 分析力和运动，建立多自由度振动系统的运动微分方程式。

（2） 按 §4.1，§4.2指出的方法确定系统的频率响应函数矩阵和脉冲响应函数矩阵。

（3） 按 §7.2，§7.4的方法确定输入相关矩阵(9.8)和输入功率谱矩阵(9.9)。

（4） 利用公式(9.15)～(9.21)计算输出响应。

例9.1 图54是一个动力吸振器的简化模型。它的主系统由质量 m_1 与弹簧 k_1 构成，其副系统由质量 m_2，弹簧 k_2 与阻尼器 c 构成。设作用在主质量上的干扰力F具有平均值为零的白噪音谱。试根据系统响应均方值极小的条件来确定吸振器的最佳参数。



54

已知：m_1，m_2，k_1，k_2，c，$S_F(\omega)=S$。

求：吸振器的最佳参数，$p_{佳}$，$\xi_{佳}$。

解：选取静平衡位置为座标原点。可画出图54(b)所示的受力图，由此可列出系统的运动微分方程组：

$$
\begin{cases}
m_1\ddot{x}_1 = F(t) - k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2) - c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \\
m_2\ddot{x}_2 = k_2(x_1 - x_2) + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2).
\end{cases} \quad (a)
$$

引入常数：

$$
\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}, \quad \rho = \frac{\omega_2}{\omega_1},
$$

$$
\xi = \frac{c}{2\sqrt{k_2m_2}}, \quad \mu = \frac{m_2}{m_1}
$$

则可把（a）式简化为

$$
\begin{cases}
\ddot{x}_1 + 2\xi\mu\rho\omega_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \mu\rho^2\omega_1^2(x_1 - x_2) \\
\qquad + \omega_1^2x_1 = \dfrac{F}{m_1}, \\
\ddot{x}_2 + 2\xi\rho\omega_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \rho^2\omega_1^2(x_2 - x_1) = 0.
\end{cases} \quad (b)
$$

为了求系统的频率响应函数，可令：

$$
F(t) = e^{j\omega t}
$$

$$
x_1(t) = H_1(\omega)e^{j\omega t} \qquad x_2(t) = H_2(\omega)e^{j\omega t}
$$

$$
\dot{x}_1(t) = j\omega H_1(\omega)e^{j\omega t} \qquad \dot{x}_2(t) = j\omega H_2(\omega)e^{j\omega t}
$$

$$
\ddot{x}_1(t) = -\omega^2H_1(\omega)e^{j\omega t} \qquad \ddot{x}_2(t) = -\omega^2H_2(\omega)e^{j\omega t}
$$

将它们代入（b）式，得

$$
\begin{cases}
\{(1+\mu\rho^2)\omega_1^2 - \omega^2 + j2\xi\mu\rho\omega_1\omega\}H_1(\omega) \\
\qquad - \{\mu\rho\omega_1(\rho\omega_1 + j2\xi\omega)\}H_2(\omega) = \dfrac{1}{m_1}, \\
-\{\rho\omega_1(\rho\omega_1 + j2\xi\omega)\}H_1(\omega) \\
\qquad + \{\rho^2\omega_1^2 - \omega^2 + j2\xi\rho\omega_1\omega\}H_2(\omega) = 0.
\end{cases} \quad (c)
$$

由此可解出

$$H_1(\omega)=\frac{1}{m_1\Delta}\{-\omega^2+j\omega(2\xi\rho\omega_1)+\rho^2\omega_1^2\},\tag{d}$$

其中

$$\begin{aligned}\Delta=&\ \omega^4-j\omega^3\{2\xi\rho(1+\mu)\omega_1\}\\&-\omega^2\{\omega_1^2+(1+\mu)\rho^2\omega_1^2\}\\&+j\omega(2\xi\rho\omega_1^3)+\rho^2\omega_1^4.\end{aligned}$$

将(d)式代入(8.9)，可求出响应的功率谱密度：

$$S_X(\omega)=S_F(\omega)|H_1(\omega)|^2=S_0|H_1(\omega)|^2.\tag{e}$$

将(e)式代入(8.3)式，可求得响应的均方值：

$$\psi^2_{x1}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_{x1}(\omega)d\omega=\frac{S_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|H_1(\omega)|^2d\omega.\tag{f}$$

由(8.4)式，可以看出当频率特性具有如下形式

$$H(\omega)=\frac{-j\omega^3B_3-\omega^2B_2+j\omega B_1+B_0}{\omega^4A_4-j\omega^3A_3-\omega^2A_2+j\omega A_1+A_0}\tag{g}$$

时，(f)式中的积分可表为

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}|H(\omega)|^2d\omega=\frac{\pi}{D}\Big\{&\frac{B_0^2}{A_0}(A_2A_3-A_1A_4)+A_3(B_1^2-2B_0B_2)+A_1(B_2^2-2B_1B_3)\\&+\frac{B_3^2}{A_4}(A_1A_2-A_0A_3)\Big\}.\end{aligned}\tag{h}$$

式中 $D=A_1(A_2A_3-A_1A_4)-A_0A_3^2$.

比较(d)，(g)两式，可求出本例中的各系数如下：

$$A_4 = m_1,\quad A_3 = 2\xi\rho(1+\mu)\omega_1 m_1,$$

$$A_2 = [1+(1+\mu)\rho^2]\omega_1^2 m_1,$$

$$A_1 = 2\xi\rho\omega_1^3 m_1,\qquad A_0 = \rho^2\omega_1^4 m_1 \qquad (i)$$

$$B_3 = 0,\quad B_2 = 1,\qquad B_1 = 2\xi\rho\omega_1,\quad B_0 = \rho^2\omega_1^2.$$

将它们代回(f)，(h)式可求得响应 x_1 的均方值。

$$\psi_{x_1}^2 = \frac{S_0}{4\mu\xi\rho\omega_1^3 m_1^2}\{(1+\mu)^2\rho^4 + 4(1+\mu)\xi^2\rho^2 - (2+\mu)\rho^2 + 1\}. \qquad (j)$$

现在按此系统响应均方值取极小值来确定吸振器的最佳频率比 $\rho_{佳}$ 与最佳阻尼比率 $\xi_{佳}$。

为此可令

$$\frac{\partial\psi_{x_1}^2}{\partial\rho} = 0,\qquad \frac{\partial\psi_{x_1}^2}{\partial\xi} = 0 \qquad (k)$$

由此可得

$$\begin{aligned}&3(1+\mu)^2\rho^4 + [4(1+\mu)\xi^2 - (2+\mu)]\rho^2 - 1 = 0,\\ &(1+\mu)^2\rho^4 - [4(1+\mu)\xi^2 + (2+\mu)]\rho^2 + 1 = 0.\end{aligned} \qquad (l)$$

由此可解出

$$\rho_{佳}^2 = \left(1+\frac{\mu}{2}\right)\Big/(1+\mu)^2,$$

$$(m)$$

$$\xi_{佳}^2 = \mu\left(1+\frac{3}{4}\mu\right)\Big/4(1+\mu)\left(1+\frac{\mu}{2}\right).$$

此式给出了在理想白噪音谱的激振力的激励下，动力吸振器的最佳频率比与最佳阻尼比率。考虑到在工程实际中，μ 值一般在 0.1 左右，故对于工程估算来说，也可以将吸振器的最佳参数近似地取为

$$\rho_{佳} = \frac{1}{1+\mu},$$

$$\xi_{佳} = \frac{\sqrt{\mu}}{2}. \tag{n}$$

例9.2 在图55所示两自由度振动系统中，已知两质量为 m_1 和 m_2，弹簧的刚度为 k_1，k_2，阻尼系数为 c_1，c_2 设基础运动加速度 $\ddot{y}_0(t)$ 输入的谱密度 $S_{\ddot{y}}(\omega)=S_0$ 是理想的白噪音谱，试求两质量绝对加速度 $\ddot{x}_1(t)$，$\ddot{x}_2(t)$，和相对位移 $y_1=x_1-y_0$，$y_2=x_2-x_1$ 的输出均方值 $\psi^2_{\ddot{x}_1}$，$\psi^2_{\ddot{x}_2}$，$\psi^2_{y_1}$，$\psi^2_{y_2}$。

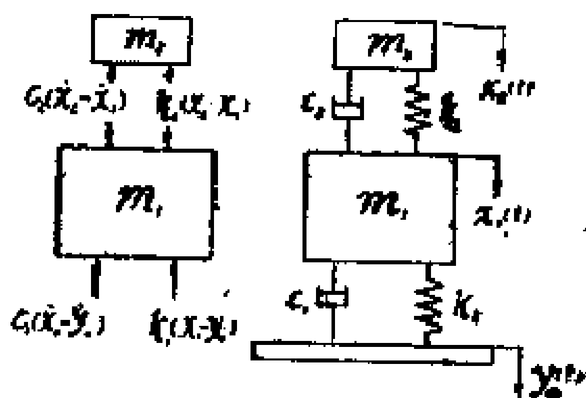


图 55

已知：m_1，m_2，k_1，k_2，c_1，c_2，$S_{\ddot{y}}(\omega)=S_0$。

求：$\psi_{\ddot{x}_1}$，$\psi_{\ddot{x}_2}$，ψ_{y_1}，ψ_{y_2}。

解： 由图55(b)所示的受力情况可列出系统的运动微分方程组：

$$m_2\ddot{x}_2 = -c_2(\dot{x}_2-\dot{x}_1)-k_2(x_2-x_1),$$

$$m_1\ddot{x}_1 = c_2(\dot{x}_2-\dot{x}_1)+k_2(x_2-x_1)-c_1(\dot{x}_1-\dot{y}_0)-k_1(x_1-y_0). \tag{A}$$

令 $\omega_1^2=\frac{k_1}{m_1}$，$\frac{c_1}{m_1}=2\xi_1\omega_1$，$\xi_1=\frac{c_1}{2\sqrt{m_1k_1}}$，

$$\omega_2^2 = \frac{k_2}{m_2}, \quad \frac{c_2}{m_2} = 2\xi_2\omega_2, \quad \xi_2 = \frac{c_2}{2\sqrt{m_2k_2}},$$

$$\mu = \frac{m_2}{m_1}, \quad y_1 = x_1 - y_0, \quad y_2 = x_2 - x_1.$$

则可将(a)式简化为

$$\ddot{x}_1 + (2\xi_1\omega_1 + 2\xi_2\mu\omega_2)\dot{x}_1 + (\omega_1^2 + \mu\omega_2^2)x_1$$

$$- 2\xi_2\mu\omega_2\dot{x}_2 - \mu\omega_2^2 x_2$$

$$= 2\xi_1\omega_1\dot{y}_0 + \omega_1^2 y_0, \qquad (B)$$

$$\ddot{x}_2 + 2\xi_2\omega_2\dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 - 2\xi_2\omega_2\dot{x}_1 - \omega_2^2 x_1 = 0.$$

和

$$\ddot{y}_1 + 2\xi_1\omega_1\dot{y}_1 + \omega_1^2 y_1 - 2\xi_2\mu\omega_2\dot{y}_2 - \mu\omega_2^2 y_2 = -\ddot{y}_0,$$

$$\ddot{y}_2 + 2\xi_2\omega_2(1+\mu)\dot{y}_2 + \omega_2^2(1+\mu)y_2 - 2\xi_1\omega_1\dot{y}_1$$

$$- \omega_1^2 y_1 = 0. \qquad (C)$$

为了求对于基础运动加速度输入的频率响应函数，必须令

$$\ddot{y}_0(t) = e^{j\omega t}, \qquad \dot{y}_0(t) = \frac{1}{j\omega}e^{j\omega t},$$

$$y_0(t) = -\frac{1}{\omega^2}e^{j\omega t};$$

$$\ddot{x}_1(t) = H_{\ddot{x}_1}(\omega)e^{j\omega t}, \quad \dot{x}_1(t) = \frac{1}{j\omega}H_{\ddot{x}_1}(\omega)e^{j\omega t},$$

$$x_1(t) = \frac{-1}{\omega^2}H_{\ddot{x}_1}(\omega)e^{j\omega t};$$

$$\ddot{x}_2(t) = H_{\ddot{x}_2}(\omega)e^{j\omega t}, \quad \dot{x}_2(t) = \frac{1}{j\omega}H_{\ddot{x}_2}(\omega)e^{j\omega t};$$

$$x_2(t) = \frac{1}{\omega^2} H_{\ddot{x}_2}(\omega) e^{j\omega t},$$

$$y_1(t) = H_{y_1}(\omega) e^{j\omega t}, \quad \dot{y}_1(t) = j\omega H_{y_1}(\omega) e^{j\omega t},$$

$$\ddot{y}_1(t) = -\omega^2 H_{y_1}(\omega) e^{j\omega t};$$

$$y_2(t) = H_{y_2}(\mu) e^{j\omega t}, \quad \dot{y}_2(t) = j\omega H_{y_2}(\omega) e^{j\omega t},$$

$$\ddot{y}_2(t) \quad -\omega^2 H_{y_2}(\omega) e^{j\omega t}. \qquad (D)$$

将(D)式代入(B)式得：

$$\left[1 + \frac{1}{j\omega}(2\xi_1\omega_1 + 2\xi_2\mu\omega_2) - \frac{\omega_1^2 + \mu\omega_2^2}{\omega^2}\right] H_{\ddot{x}_1}(\omega)$$

$$-\left[\frac{1}{j\omega} 2\xi_2\mu\omega_2 - \frac{\mu\omega_2^2}{\omega^2}\right] H_{\ddot{x}_2}(\omega)$$

$$= \left(2\xi\omega_1/j\omega \quad \frac{\omega_1^2}{\omega^2}\right),$$

$$-\left[\frac{2\xi_2\omega_2}{j\omega} - \frac{\omega_2^2}{\omega^2}\right] H_{\ddot{x}_1}(\omega)$$

$$+\left[1 + \frac{1}{j\omega} 2\xi_2\omega_2 - \frac{\omega_2^2}{\omega^2}\right] H_{\ddot{x}_2}(\omega) - 0$$

由此可解出对应于绝对加速度输出的频率响应函数

$$H_{\ddot{x}_1}(\omega) = \frac{-(j\omega 2\xi_1\omega_1 + \omega_1^2)(\omega^2 \quad j\omega 2\xi_2\omega_2 - \omega_2^2)}{\Delta}$$

$$= \frac{\left\{\begin{array}{c}\omega_1^2\omega_2^2 - (\omega_1^2 + 4\xi_1\xi_2\omega_1\omega_2)\omega^2 \\ + 2j[(\xi_1\omega_1\omega_2^2 + \xi_2\omega_1^2\omega_2)\omega \quad \xi_1\omega_1\omega^3]\end{array}\right\}}{\Delta},$$

$$(E)$$

$$H_{\ddot{x}_2}(\omega) = \frac{(j\omega 2\xi_1\omega_1 + \omega_1^2)(-j\omega 2\xi_2\omega_2 - \omega_2^2)}{\Delta}$$

$$= \frac{\left\{ \begin{array}{l} \omega_1^2\omega_2^2 - 4\xi_1\xi_2\omega_1\omega_2\omega^2 \\ + 2j\omega_1\omega_2(\xi_1\omega_2 + \xi_2\omega_1)\omega \end{array} \right\}}{\Delta};$$

其中

$$\Delta = \begin{vmatrix} \begin{array}{l} \omega^2 - (j\omega 2\xi_1\omega_1 + \omega_1^2) \\ \quad - \mu(j\omega 2\xi_2\omega_2 + \omega_2^2) \end{array} & (j\omega 2\xi_2\omega_2 + \omega_2^2)\mu \\ j\omega 2\xi_2\omega_2 + \omega_2^2 & \omega^2 - (j\omega 2\xi_2\omega_2 + \omega_2^2) \end{vmatrix}$$

$$= [\omega^2 - (j\omega 2\xi_1\omega_1 + \omega_1^2) - \mu(j\omega 2\xi_2\omega_2 + \omega_2^2)] \times$$
$$[\omega^2 - (j\omega 2\xi_2\omega_2 + \omega_2^2)] - \mu(j\omega 2\xi_2\omega_2 + \omega_2^2)^2$$
$$= [\omega^2 - (j\omega 2\xi_1\omega_1 + \omega_1^2)][\omega^2 - (j\omega 2\xi_2\omega_2 + \omega_2^2)]$$
$$- \mu(j\omega 2\xi_2\omega_2 + \omega_2^2)\omega^2$$
$$= \omega^4 - 2j[\xi_1\omega_1 + (1 + \mu)\xi_2\omega_2]\omega^3$$
$$- [\omega_1^2 + (1 + \mu)\omega_2^2 + 4\xi_1\xi_2\omega_1\omega_2]\omega^2$$
$$+ 2j(\xi_1\omega_2^2 + \xi_2\omega_2\omega_1^2)\omega + \omega_1^2\omega_2^2。\quad (F)$$

将(D)式代入(C)式得：

$$(\omega_1^2 + 2\xi_1\omega_1 j\omega - \omega^2)H_{y_1}(\omega)$$
$$- (2\xi_2\omega_2 j\omega + \omega_2^2)\mu H_{y_2}(\omega) = -1$$
$$(j\omega 2\xi_1\omega_1 + \omega_1^2)H_{y_1}(\omega)$$
$$+ [(1 + \mu)(j\omega 2\xi_2\omega_2 + \omega_2^2) - \omega^2]H_{y_2}(\omega) = 0$$

由此可解出对应于相对位移输出的频率响应函数

$$H_{y_1}(\omega) = \frac{-(1 + \mu)\omega_2^2 + \omega^2 - 2j(1 + \mu)\xi_2\omega_2\omega}{\Delta},$$

$$H_{y_1}(\omega)=\frac{-\omega_1^2-2j\xi_1\omega_1\omega}{\Delta}.$$

其中Δ仍由(F)来表示

利用公式(8.9)可求出输出的功率谱密度

$$S_{\ddot{x}_1}(\omega)=|H_{\ddot{x}_1}(\omega)|^2S_0,\qquad S_{y_1}(\omega)=|H_{y_1}(\omega)|^2S_0,$$

$$S_{\ddot{x}_2}(\omega)=|H_{\ddot{x}_2}(\omega)|^2S_0,\qquad S_{y_2}(\omega)=|H_{y_2}(\omega)|^2S_0,$$

将它们代入(8.3)式并利用(8.4)式中的积分关系，可求出相应的均方值

$$\psi^2_{\ddot{x}_1}=E[\ddot{x}_1^2]=\frac{S_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|H_{\ddot{x}_1}(\omega)|^2d\omega=S_0\frac{X_1}{D},$$

$$\psi^2_{\ddot{x}_2}=E[\ddot{x}_2^2]=\frac{S_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|H_{\ddot{x}_2}(\omega)|^2d\omega=S_0\frac{X_2}{D},$$

$$\psi^2_{y_1}=E[y_1^2]=\frac{S_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|H_{y_1}(\omega)|^2d\omega=S_0\frac{Y_1}{D},$$

$$\psi^2_{y_2}=E[y_2^2]=\frac{S_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|H_{y_2}(\omega)|^2d\omega=S_0\frac{Y_2}{D}.$$

其中：

$$\begin{aligned}X_1=\ &2\pi\omega_1^2\omega_2[\mu\xi_1\omega_1\omega_2^2+\xi_2\{(\omega_1^2-(1+\mu)\omega_2^2)^2\\&+\mu\omega_1^2\omega_2^2\}+4\{\xi_1^3\mu\omega_1\omega_2^3+\xi_1^2\xi_2((\omega_1^2-\omega_2^2)^2\\&+\omega_1^2\omega_2^2+\mu\omega^4)+\xi_1\xi_2^2(\omega_1^3\omega_2+(1+\mu)\omega_1\omega_2^3)\\&+\xi_2^3(1+\mu)\omega_1^2\omega_2^2\}+16\omega_1\omega_2\xi_1^2\xi_2\{(\xi_1^2\\&+\xi_2^2)\omega_1\omega_2+(\omega_1^2+\omega_2^2)\xi_1\xi_2\}],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X_2=\ &2\pi\omega_1^2\omega_2^2[\xi_1\omega_1(\omega_1^2+\mu\omega_2^2)+\xi_2\omega_2\{\mu\omega_1^2\\&+(1+\mu)^2\omega_2^2\}+4\{\xi_1^3\omega_1\omega_2^2+\xi_1^2\xi_2(\omega_1^2\omega_2\\&+(1+\mu)\omega_2^3)+\xi_1\xi_2^2(\omega_1^3+(1+\mu)\omega_1\omega_2^2)+\xi_2^3(1\\&+\mu)\omega_1^2\omega_2\}+16\xi_1^2\xi_2^2\omega_1\omega_2(\xi_1\omega_2+\xi_2\omega_1)],\end{aligned}$$

$$Y_1=\pi\Big[2\xi_1\omega_1\omega_2^3\Big\{\mu^2+\mu(1+\mu)^2\Big(\frac{\omega_2}{\omega_1}\Big)^2\Big\}$$

$$+2\xi_2\omega_1^2\omega_2\Big\{\Big(1-(1+\mu)^2\cdot\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}\Big)^2$$

$$+\mu(1+\mu)^2\Big(\frac{\omega_2}{\omega_1}\Big)^2\Big\}+8\xi_1\xi_2\omega_1\omega_2^2(1+\mu)^2$$

$$\cdot\Big\{1+(1+\mu)\Big(\frac{\omega_2}{\omega_1}\Big)^2\Big\}+8\xi_2^2\omega_2^3(1+\mu)^2$$

$$\cdot\Big\{1+\mu+\Big(\frac{\xi_1}{\xi_2}\Big)^2\Big\}\Big],$$

$$Y_2=\pi\omega_1^2\Big[2\xi_1\omega_1\Big\{\mu+\Big(\frac{\omega_2}{\omega_1}\Big)^2\Big\}+2\xi_1\omega_2$$

$$\cdot\Big\{(1+\mu)^2-\mu\Big(\frac{\omega_1}{\omega_2}\Big)^2\Big\}+8\xi_1\xi_2$$

$$\cdot\Big\{\xi_1\omega_2\Big(1+\mu+\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}\Big)+\xi_2\omega_1\Big(1+\mu+\frac{\xi_1^2}{\xi_2^2}\Big)\Big\}\Big],$$

$$D=8\pi\omega_1\omega_2\,[\mu\omega_1\omega_2(\xi_1\omega_2+\xi_2\omega_1)^2+\xi_1\xi_2$$

$$\cdot\{\omega_1^2-(1+\mu)\omega_2^2\}^2+4\xi_1\xi_2\omega_1\omega_2$$

$$\cdot\{\omega_1\omega_2(\xi_1^2+(1+\mu)\xi_2^2)$$

$$+\xi_1^2\xi_2(\omega_1^2+(1+\mu)\omega_1^2)\}]。$$

例9.3 图 56 所示的振动系统可视为汽车的两个自由度的简化模型。设支持在弹簧悬架上的车身质量为m，绕重心的回转半径为ρ_0，前后支承的距离为l_0，前支承 1 至重心铅垂线的距离为l，前后支承的刚度和阻尼分别为k_1，k_2，c_1，c_2。若前、后轮的两个位移输入$x_1(t)$、$x_2(t)$的谱密度矩阵是

$$S_{xx}(\omega)=S(\omega)\begin{bmatrix}1 & e^{-i\omega\tau_0}\\ e^{i\omega\tau_0} & 1\end{bmatrix},$$

试求重心铅垂位移和绕重心转角响应的功率谱密度矩阵。式中$S(\omega)$是前后轮位移输入的功率谱密度。$\tau_0=l_0/V$是输入$x_1(t)$，$x_2(t)$之间的固定时差。V是汽车速度。

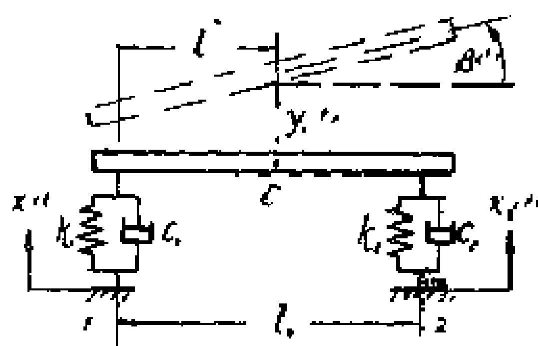


图 56

已知：m，ρ，l，l_0，k_1，k_2，c_1，c_2；

$$S_{xx}(\omega)=S(\omega)\begin{bmatrix}1 & e^{-i\omega\tau_0}\\ e^{i\omega\tau_0} & 1\end{bmatrix};$$

求：
$$S_{yy}(\omega)=\begin{bmatrix}S_{y_1y_1}(\omega) & S_{y_1\beta}(\omega)\\ S_{\beta y_1}(\omega) & S_{\beta\beta}(\omega)\end{bmatrix}.$$

解：通过受力分析后，可列出对于重心铅垂位移$y(t)$和绕重心转角$\beta(t)$的运动微分方程式：

$$m\ddot{y}_1+(c_1+c_2)\dot{y}_1+(k_1+k_2)y_1-\{lc_1-(l_0-l)c_2\}\dot{\beta}$$
$$-\{lk_1-(l_0-l)k_2\}\beta=k_1x_1+c_1\dot{x}_1+k_2x_2+c_2\dot{x}_2;$$
$$m\rho^2\ddot{\beta}+\{l^2c_1+(l_0-l)^2c_2\}\dot{\beta}+\{l^2k_1+(l_0-l)^2k_2\}\beta$$
$$-\{lc_1-(l_0-l)c_2\}\dot{y}_1-\{lk_1-(l_0-l)k_2\}y_1$$
$$=-l(k_1x_1+c_1\dot{x}_1)+(l_0-l)(k_2x_2+c_2\dot{x}_2)。\tag{a}$$

令 $y_2 = l\beta$，再引入下列参数：

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_1 + p^2 k_2}{m}},$$

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k_1}{m}}, \qquad \omega_b = \sqrt{\frac{k_2}{m}},$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 - pk_2}{m}}, \qquad \xi_1 = \frac{c_1 + c_2}{2\sqrt{m(k_1 + k_2)}},$$

$$\xi_2 = \frac{c_1 + p^2 c_2}{2\sqrt{m(k_1 + p^2 k_2)}},$$

$$\xi_a = \frac{c_1}{2\sqrt{mk_1}}, \qquad \xi_b = \frac{c_2}{2\sqrt{mk_2}},$$

$$\xi_0 = \frac{c_1 - pc_2}{2\sqrt{m(k_1 - pk_2)}},$$

$$p = (l_0 - l)/l, \qquad q = l_1/l_0$$

于是，方程（a）可改写为

$$\ddot{y}_1 + 2\xi_1\omega_1\dot{y}_1 + \omega_1^2 y_1 - \omega_0^2 y_2 - 2\xi_0\omega_0\dot{y}_2$$
$$= \omega_a^2 x_1 + 2\xi_a\omega_a\dot{x}_1 + \omega_b^2 x_2 + 2\xi_b\omega_b\dot{x}_2; \quad (b)$$

$$q^2\ddot{y}_2 + 2\xi_2\omega_2\dot{y}_2 + \omega_2^2 y_2 - \omega_0^2 y_1 - 2\xi_0\omega_0\dot{y}_1$$
$$= -(\omega_a^2 x_1 + 2\xi_a\omega_a\dot{x}_1) + p(\omega_b^2 x_2 + 2\xi_b\omega_b\dot{x}_2).$$

为了求 y_1，y_2 对应于输入 x_1 的频率响应函数，可在（b）式中令

$$x_1 = e^{i\omega t}, \quad x_2 = 0, \quad y_1 = H_{11}(\omega)e^{i\omega t},$$

$$y_2 = H_{21}(\omega)e^{i\omega t}$$

于是有

$$(\omega_1^2-\omega^2+j2\xi_1\omega_1\omega)H_{11}(\omega)-(\omega_0^2+j2\xi_0\omega_0\omega)\cdot H_{21}(\omega)$$

$$=\omega_a^2+j2\xi_a\omega_a\omega\ ;$$

$$-(\omega_0^2+j2\xi_0\omega_0\omega)H_{11}(\omega)+(\omega_2^2-q^2\omega^2$$

$$+j2\xi_2\omega_2\omega)H_{21}(\omega)=-(\omega_a^2+j2\xi_a\omega_a\omega)。$$

解此方程组，可得

$$H_{11}(\omega)=\frac{1}{\Delta}\Big\{2jq^2\xi_a\omega_a\omega^3+\omega^2[q^2\omega_a^2-4\xi_a\omega_a$$

$$\cdot(\xi_0\omega_0-\xi_2\omega_2)]+2j\omega\Big[\omega_a^2(\xi_0\omega_0-\xi_2\omega_2)$$

$$+\xi_a\omega_a(\omega_0^2-\omega_2^2)\Big]+\omega_a^2(\omega_0^2-\omega_2^2)\Big\};$$

$$(c)$$

$$H_{21}(\omega)=\frac{1}{\Delta}\Big\{2j\xi_a\omega_a\omega^3+\omega^2\Big[\omega_a^2-4\xi_a\omega_a$$

$$\cdot(\xi_0\omega_0-\xi_1\omega_1)\Big]+2j\omega\Big[\omega_a^2(\xi_0\omega_0-\xi_1\omega_1)+\xi_a\omega_a$$

$$\cdot(\omega_0^2-\omega_1^2)\Big]+\omega_a^2(\omega_0^2-\omega_1^2)\Big\}。$$

式中 $$\Delta=q^2\omega^4+2j(q^2\xi_1\omega_1+\xi_2\omega_2)\omega^3+(q^2\omega_1^2$$

$$+4\xi_1\xi_2\omega_1\omega_2+\omega_2^2-4\xi_0^2\omega_0^2)\omega^2+2j\omega[2\xi_0\omega_0^3-\omega_1\omega_2$$

$$\cdot(\xi_1\omega_2+\xi_2\omega_1)]+\omega_0^4-\omega_1^2\omega_2^2。$$

同理，为了求对应于输入 x_2 的频率特性，可令方程（b）中

$$x_1=0\ ,\ x_2=e^{j\omega t},\quad y_1=H_{12}(\omega)e^{j\omega t},$$

$$y_2 \quad H_{22}(\omega)e^{j \quad t},$$

由此得

$$H_{12}(\omega) = \frac{1}{\Delta}\left\{2jq^2\xi_b\omega_b\omega^3 + \omega^2[q^2\omega^2 + 4\xi_b\omega\right.$$

$$\cdot(p\xi_q\omega \quad + \xi_2\omega_{\ }) - 2j\omega[\omega^2(p \cdot \omega \quad + \xi_b \ _2) + \quad$$

$$\left.\cdot(p\omega_b^2 + \omega_2^2)] - \omega^2(p\omega^2 + \omega_2^2) \quad \right\};$$

(d)

$$H_{22}(\omega) = \frac{1}{\Delta}\left\{2jp\xi_b\omega_b\omega^3 + \omega^2 \quad p\omega^2 + \right.$$

$$\cdot(\xi \ \omega_1 + p\xi_1\omega_1) - 2j\omega[\omega_b^2(\quad \omega \quad + p \quad) + \quad$$

$$\left.\cdot(\omega_b^2 + p\omega_1^2)] \quad \omega_b^2(\omega^2 + p\omega^2 \quad \right\}.$$

所以，系统的频率响应函数矩阵可写为

$$H(\omega) = \begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) \end{bmatrix}. \qquad (e)$$

将(e)式和已知的输入功率谱密度矩阵 $S_{xx}(\omega)$ 代入(9.18)式，可求出输出的功率谱密度矩阵的表达式如下：

$$S_{yy}(\omega) = H^*(\omega)S_{xx}(\omega)H^T(\omega)$$

$$= S(\omega)\begin{bmatrix} H_{11}^*(\omega) & H_{12}^*(\omega) \\ H_{21}^*(\omega) & H_{22}^*(\omega) \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 1 & e^{-j\omega\tau} \\ e^{j\omega\tau} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \ (\omega) & H_2 \ \omega) \\ H \ (\omega) & H_{\ 2}\omega) \end{bmatrix}.$$

(f)

再将(c)，(d)两式和它们的共轭复数代入上式，经运算后，就可求得各种输出的功率谱密度。

例9.4 图57所示无质量小车用弹簧与粘性阻尼器连接在两个结点上。假设该两点的运动位移 $y_1(t)$ 与 $y_2(t)$ 的谱密度为

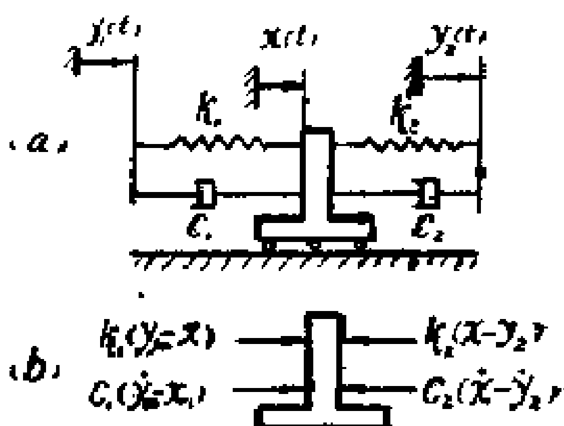
$$S_{y_1}(\omega)=S_{y_2}(\omega)=S_0$$

且有 $y_2(t+T)=y_1(t)$ 故其互谱为

$$S_{y_1y_2}(\omega)=S_0e^{-j\omega T},$$

$$S_{y_2y_1}(\omega)=S_0e^{j\omega T}$$

试求其响应谱密度 $S_x(\omega)$ 以及响应均方值 $E[x^2]$。



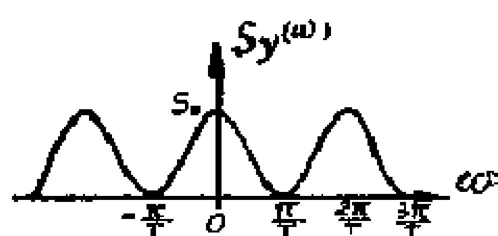


图 57

已知：k_1，k_2，c_1，c_2

$$S_y(\omega)=S_0\begin{bmatrix}1 & e^{-j\omega T}\\ e^{j\omega T} & 1\end{bmatrix}。$$

求：$S_x(\omega)$，ψ_x^2。

解： 以无质量的小车为研究对象。系统受到两个位移输入的激励后，使小车产生一个位移输出。根据图57(b)所示小车的受力情况应用平衡条件可得：

$$k_1(y_1-x)+c_1(\dot{y}_1-\dot{x})=k_2(x-y_2)+c_2(\dot{x}-\dot{y}_2)。$$

把此式整理后便得到小车的运动微分方程

$$(c_1+c_2)\dot{x}+(k_1+k_2)x = k_1y_1+k_2y_2+c_1\dot{y}_1+c_2\dot{y}_2. \qquad (1)$$

为了求系统的频率响应函数，令

$$y_1=e^{j\omega t},\quad y_2=0,$$

$$x=H_1(\omega)e^{j\omega t},\quad \dot{x}=j\omega H_1(\omega)e^{j\omega t}.$$

代入(1)式后，可解得

$$H_1(\omega)=\frac{k_1+jc_1\omega}{(k_1+k_2)+(c_1+c_2)j\omega}. \qquad (2)$$

再令

$$y_1=0,\quad y_2=e^{j\omega t},$$

$$x=H_2(\omega)e^{j\omega t},\quad \dot{x}=j\omega H_2(\omega)e^{j\omega t}.$$

代入(1)式，可解得：

$$H_2(\omega)=\frac{k_2+jc_2\omega}{(k_1+k_2)+j(c_1+c_2)\omega} \qquad (3)$$

由(2)，(3)式组成系统的频率响应矩阵

$$H(\omega)=\left[H_1(\omega)H_2(\omega)\right]=\frac{[k_1+jc_1\omega \quad k_2+jc_2\omega]}{(k_1+k_2)+j(c_1+c_2)\omega}. \qquad (4)$$

利用公式(3.18)计算输出的功率谱

$$S_{xx}(\omega)=H^*(\omega)S_y(\omega)H^T(\omega)$$

$$=\left[H_1^*(\omega)\ H_2^*(\omega)\right]S_0\cdot\begin{bmatrix}1 & e^{-j\omega T}\\ e^{j\omega T} & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}H_1(\omega)\\ H_2(\omega)\end{bmatrix}$$

$$
S_0\left[H_1^*(\omega)\quad H_2^*(\omega)\right]\begin{bmatrix} H_1(\omega)+H_2(\omega)e^{-j\omega T} \\ H_1(\omega)e^{j\omega T}+H_2(\omega)\end{bmatrix}
$$

$$
=S_0\left\{H_1^*(\omega)H_1(\omega)+H_1^*(\omega)H_2(\omega)e^{-j\omega T}+H_2^*(\omega)H_1(\omega)e^{j\omega T}+H_2^*(\omega)H_2(\omega)\right\}
$$

$$
=S_0\left\{\frac{k_1^2+c_1^2\omega^2}{(k_1+k_2)^2+(c_1+c_2)^2\omega^2}+\frac{k_1k_2+j(k_1c_2-k_2c_1)\omega+c_1c_2\omega^2}{(k_1+k_2)^2+(c_1+c_2)^2\omega^2}e^{-j\omega T}+\frac{k_1k_2-j(k_1c_2-k_2c_1)\omega+c_1c_2\omega^2}{(k_1+k_2)^2+(c_1+c_2)^2\omega^2}e^{j\omega T}+\frac{k_2^2+c_2^2\omega^2}{(k_1+k_2)^2+(c_1+c_2)^2\omega^2}\right\}
$$

$$
=\frac{S_0}{(k_1+k_2)^2+(c_1+c_2)^2\omega^2}\left\{k_1^2+k_2^2+(c_1^2+c_2^2)\omega^2+(k_1k_2+c_1c_2\omega^2)(e^{-j\omega T}+e^{j\omega T})+j(k_1c_2-k_2c_1)\omega(e^{-j\omega T}-e^{j\omega T})\right\}
$$

$$
=S_0\left\{\frac{k_1^2+k_2^2+(c_1^2+c_2^2)\omega^2+2(k_1k_2+c_1c_2\omega^2)\cos\omega T-2(k_1c_2-k_2c_1)\omega\sin\omega T}{(k_1+k_2)^2+(c_1+c_2)^2\omega^2}\right\}. \qquad (5)
$$

当时滞 T 等于零时，则 $y_1(t)=y_2(t)$，由此可见

$$
S_{xx}(\omega)=S_0. \qquad (6)
$$

从谱的角度来看，(6)式表明小车的运动完全与基础的运动相同。

对于大的ω，即高频时的谱密度，可表示为

$$S_{xx}(\infty) = \lim_{\omega\to\infty} S_{xx}(\omega)$$

$$= \lim_{\omega\to\infty} \frac{S_0}{\frac{(k_1+k_2)^2}{\omega^2} + (c_1+c_2)^2} \cdot \left\{ \frac{k_1^2+k_2^2}{\omega^2} + c_1^2 + c_2^2 + 2\left(\frac{k_1k_2}{\omega^2} + c_1c_2\right) \cos\omega T + \frac{2(k_1c_2 - k_2c_1)}{\omega}\sin\omega T \right\}$$

$$= \frac{S_0}{(c_1+c_2)^2}\left\{c_1^2+c_2^2+2c_1c_2\cos\omega T\right\}$$

可见当 $\omega\to\infty$ 时，输出谱密度 $S_{xx}(\omega)$ 在 $\frac{(c_1^2+c_2^2)}{(c_1+c_2)^2}S_0$ 与 S_0 之间波动，是一个有限的正值，因而

$$\psi_x^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega)d\omega \to \infty$$

这是由于激励的噪声特性引起的。

例9.5 在图58所示系统中，已知弹簧的刚度 $k_1 = k_2 = k_3 = k$，阻尼系数 c，若两小车位移输入有关系：$y_2(t+T) = y_1(t)$ 且它们的谱密度均为理想白噪声，即 $S_{y_2}(\omega) =$

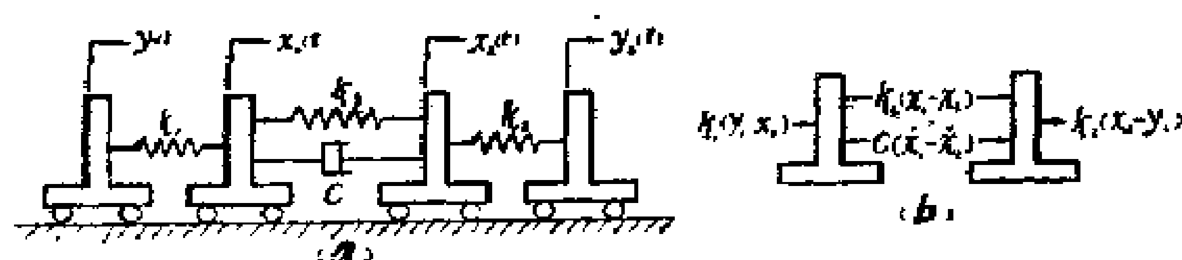


图 58

$= S_{y_2}(\omega) = S_0$（常数），试计算两小车位移输出的功率谱密度。

已知：$k_1=k_2=k_3=k$，c；

$y_2(t+T)=y_1(t)$；

$S_{y_1}(\omega)=S_{y_2}(\omega)=S_0$。

求：　$S_x(\omega)$。

解：（1）确定系统的频率响应函数

由图58（b）所示的受力情况可列出系统的运动微分方程：

$$k(y_1-x_1)=k(x_1-x_2)+c(\dot{x}_1-\dot{x}_2),$$

$$k(x_2-y_2)=k(x_1-x_2)+c(\dot{x}_1-\dot{x}_2).$$

将它们简化为

$$c\dot{x}_1+2kx_1-c\dot{x}_2-kx_2=ky_1, \qquad (1)$$

$$c\dot{x}_2+2kx_2-c\dot{x}_1-kx_1=ky_2. \qquad (2)$$

为了求频率响应函数$H_{11}(\omega)$，$H_{21}(\omega)$，令：

$$y_1(t)=e^{j\omega t},\quad y_2(t)=0;$$

$$x_1(t)=H_{11}(\omega)e^{j\omega t},\quad x_2(t)=H_{21}(\omega)e^{j\omega t},$$

$$\dot{x}_1(t)=j\omega H_{11}(\omega)e^{j\omega t},\quad \dot{x}_2(t)=j\omega H_{21}(\omega)e^{j\omega t}.$$

将它们代入（1），（2）两式，得

$$(2k+jc\omega)H_{11}(\omega)e^{j\omega t}-(k+jc\omega)H_{21}(\omega)e^{j\omega t}=ke^{j\omega t}$$

$$-(k+jc\omega)H_{11}(\omega)e^{j\omega t}+(2k+jc\omega)H_{21}(\omega)e^{j\omega t}=0.$$

由此可解出

$$H_{11}(\omega)=\frac{2k+jc\omega}{3k+j2c\omega}, \qquad (3)$$

$$H_{21}(\omega) = \frac{k+jc\omega}{3k+j2c\omega}. \tag{4}$$

再令：

$$y_1(t)=0, \qquad y_2(t)=e^{j\omega t};$$

$$x_1(t)=H_{12}(\omega)e^{j\omega t}, \quad x_2(t)=H_{22}(\omega)e^{j\omega t}$$

代入方程(1)，(2)后，可求得

$$H_{12}(\omega)=\frac{k+jc\omega}{3k+j2c\omega}, \tag{5}$$

$$H_{22}(\omega)=\frac{2k+jc\omega}{3k+j2c\omega}. \tag{6}$$

由(4)～(6)式可写出系统的频率响应矩阵

$$H(\omega)=\begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{3k+j2c\omega}\begin{bmatrix} 2k+jc\omega & k+jc\omega \\ k+jc\omega & 2k+jc\omega \end{bmatrix} \tag{7}$$

(2) 计算输入的功率谱密度

将 $S_{y_1}(\omega)=S_{y_2}(\omega)=S_0$ 代入公式(8.6)，计算输出的自相关函数

$$R_{y_1}(\tau)=R_{y_2}(\tau)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_{y_1}(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

$$=\frac{S_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega\tau}d\omega$$

$$=S_0\delta(\tau), \tag{8}$$

$$
\begin{aligned}
R_{y_1y_2}(\tau) &= E[y_1(t)y_2(t+\tau)] \\
&= E[y_2(t+T)y_2(t+T+\tau-T)] \\
&= R_{y_2}(\tau-T) \\
&= S_0\delta(\tau-T)。 \qquad (9)
\end{aligned}
$$

将(9)式代入公式(8.12)，计算输入的互功率谱

$$
\begin{aligned}
S_{y_1y_2}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{y_1y_2}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} S_0\delta(\tau-T)e^{-j\omega\tau}d\tau \\
&= S_0e^{-j\omega T}, \qquad (10)
\end{aligned}
$$

$$
S_{y_2y_1}(\omega) = S_{y_1y_2}(-\omega) = S_0e^{j\omega T} \qquad (11)
$$

由此可写出输入的功率谱矩阵

$$
S_{yy}(\omega) = \begin{bmatrix} S_{y_1}(\omega) & S_{y_1y_2}(\omega) \\ S_{y_2y_1}(\omega) & S_{y_2}(\omega) \end{bmatrix}
= S_0\begin{bmatrix} 1 & e^{-j\omega T} \\ e^{j\omega T} & 1 \end{bmatrix}
$$

(3) 用公式(9.18)计算系统输出的功率谱矩阵

$$
\begin{aligned}
S_{xx}(\omega) &= \begin{bmatrix} S_{x_1}(\omega) & S_{x_1x_2}(\omega) \\ S_{x_2x_1} & S_{x_2}(\omega) \end{bmatrix} \\
&= H^*(\omega)\cdot S_{yy}(\omega)H^T(\omega) \\
&= \frac{S_0}{\Delta}\begin{bmatrix} 2k-jc\omega & k-jc\omega \\ k-jc\omega & 2k-jc\omega \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\times\begin{bmatrix} 1 & e^{-j\omega T} \\ e^{j\omega T} & 1 \end{bmatrix}
\times\begin{bmatrix} 2k+jc\omega & k+jc\omega \\ k+jc\omega & 2k+jc\omega \end{bmatrix}
$$

$$
=\frac{S_0}{\Delta}\begin{bmatrix} 2k-jc\omega & k-jc\omega \\ k-jc\omega & 2k-jc\omega \end{bmatrix}
$$

$$
\cdot\begin{bmatrix} 2k+jc\omega+e^{-j\omega T}(k+jc\omega) & k+jc\omega+e^{-j\omega T}(2k+jc\omega) \\ e^{j\omega T}(2k+jc\omega)+k+jc\omega & e^{j\omega T}(k+jc\omega)+2k+jc\omega \end{bmatrix},
$$

进行此矩阵的乘法运算后，可求得系统输出的自谱与互谱如下：

$$
S_{x_1}(\omega)=\frac{S_0}{\Delta}\Big\{4k^2+c^2\omega^2+(2k-jc\omega)(k+jc\omega)e^{j\omega T}+k^2+c^2\omega^2
$$

$$
+(k-jc\omega)e^{j\omega T}(2k+jc\omega)\Big\}
$$

$$
=\frac{S_0}{\Delta}\Big\{5k^2+2c^2\omega^2+e^{-j\omega T}(2k^2+jkc\omega+c^2\omega^2)
$$

$$
+e^{j\omega T}[2k^2-jkc\omega+c^2\omega^2]\Big\},
$$

$$
S_{x_1x_2}(\omega)=\frac{S_0}{\Delta}\Big\{(2k-jc\omega)(k+jc\omega)+e^{-j\omega T}
$$

$$\cdot(4k^2+c^2\omega^2)+e^{j\omega T}(k^2+c^2\omega^2)+(k-jc\omega)(2k+jc\omega)\Big\}$$

$$=\frac{S_0}{\Delta}\Big\{2k^2+2c^2\omega^2+jkc\omega+e^{-j\omega T}(4k^2+c^2\omega^2)$$

$$+e^{j\omega T}(k^2+c^2\omega^2)+2k^2-jkc\omega+c^2\omega^2\Big\}$$

$$=\frac{S_0}{\Delta}\Big[4k^2+2c^2\omega^2+e^{-j\omega T}(4k^2+c^2\omega^2)+e^{j\omega T}$$

$$\cdot(k^2+c^2\omega^2)\Big],$$

$$S_{x_1x_2}(\omega)=\frac{S_0}{\Delta}\Big\{(k-jc\omega)(2k+jc\omega)+e^{-j\omega T}(k^2+c^2\omega^2)$$

$$+e^{j\omega T}(4k^2+c^2\omega^2)+(2k-jc\omega)(k+jc\omega)\Big\}$$

$$=\frac{S_0}{\Delta}\Big\{2(k^2+c^2\omega^2)+k^2-jkc\omega+e^{-j\omega T}$$

$$\cdot(k^2+c^2\omega^2)+e^{j\omega T}(4k^2+c^2\omega^2)+k^2+jkc\omega\Big\}$$

$$=\frac{S_0}{\Delta}\Big[4k^2+2c^2\omega^2+e^{-j\omega T}(k^2+c^2\omega^2)+e^{j\omega T}$$

$$\cdot(4k^2+c^2\omega^2)\Big]$$

$$S_{x_2}(\omega)=\frac{S_0}{\Delta}\Big\{(k^2+c^2\omega^2)+e^{-j\omega T}(2k+jc\omega)$$

$$\cdot(k-jc\omega)+e^{j\omega T}(k+jc\omega)$$

$$\cdot(2k-jc\omega)+4k^2+c^2\omega^2\Big\}$$

$$=\frac{S_0}{\Delta}\Big[5k^2+2c^2\omega^2+e^{-j\omega T}(2k^2+c^2\omega^2-kjc\omega)+$$

$$e^{j\omega T}(2k^2+c^2\omega^2+kjc\omega)\ \Big]．$$

其中　　$\Delta=9k^2+4c^2\omega^2$。

例9.6　在图 59 所示的二自由度系统中，设输入为力 $F(t)$，输出是两质量的位移；若激振力 $F(t)$ 的功率谱密度是 $S_F(\omega)=S_0$ 的理想白噪声，试求系统的平均动能

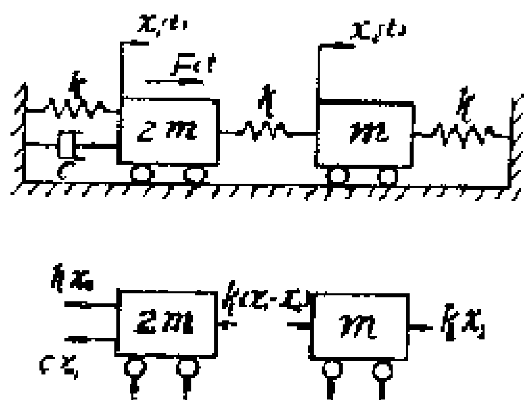


图　59

已知：m、k、c，

$S_F(\omega)$　S_0，

求：系统的平均动能

解：由图59(b)所示的受力情况可列出系统的运动微分方程。

$$2m\ddot{x}_1+c\dot{x}_1+2kx_1-kx_2=F(t),$$

$$m\ddot{x}_2+2kx_2-kx_1\quad 0. \qquad (1)$$

为了求系统的频率响应函数令

$$F(t)=e^{j\omega t},$$

$$x_1(t)\quad H_1(\omega)e^{j\omega t}\ ,\quad x_2(t)=H_2(\omega)e^{j\omega t},$$

$$\dot{x}_1(t)=j\omega H_1(\omega)e^{j\omega t}\ ,\quad \dot{x}_2(t)\quad j\omega H_2(\omega)e^{j\omega t},$$

则　$$\ddot{x}_1(t)\quad -\omega_2 H_1(\omega)e^{j\omega t}\ ,\ddot{x}_2(t)=-\omega^2 H_2(\omega)e^{j\omega t}.$$

将它们代入(1)式，并简化得

$$(2k-2m\omega^2+jc\omega)H_1(\omega)-kH_2(\omega)=1,$$

$$-kH_1(\omega)+(2k-m\omega^2)H_2(\omega)\quad 0. \quad (2)$$

由此可解出两个频率响应函数

$$H_1(\omega)=\frac{2k-m\omega^2}{(2k-2m\omega^2+jc\omega)(2k-m\omega^2)-k^2}$$

$$=\frac{2k-m\omega^2}{3k^2+j2kc\omega-6mk\omega^2-jcm\omega^3+2m^2\omega^4},\tag{3}$$

$$H_2(\omega)=\frac{k}{3k^2+j2kc\omega-6mk\omega^2-jcm\omega^3+2m^2\omega^4}.\tag{4}$$

应用公式(9.18)计算输出的功率谱矩阵

$$S_x(\omega)=H^*(\omega)S_F(\omega)H^T(\omega)$$

$$=\begin{Bmatrix} H^*(\omega) \\ H_1^*(\omega) \end{Bmatrix} S_F(\omega)\left[H_1(\omega),H_2(\omega)\right]$$

$$=S_0\begin{bmatrix} H_1^*(\omega)H_1(\omega) & H_1^*(\omega)H_2(\omega) \\ H_2^*(\omega)H_1(\omega) & H_2^*(\omega)H_2(\omega) \end{bmatrix}$$

$$=\frac{S_0}{\Delta}\begin{bmatrix} (2k-m\omega^2)^2 & k(2k-m\omega^2) \\ k(2k-m\omega^2) & k^2 \end{bmatrix},$$

其中 $\Delta=(3k^2-6mk\omega^2+2m^2\omega^4)^2+c^2\omega^2(2k-m\omega^2)^2$。

将两质量速度输出所对应的频率响应函数

$$H_{\dot{x}_1}(\omega)=j\omega H_1(\omega)\qquad H_{\dot{x}_2}(\omega)=j\omega H_2(\omega).$$

代入公式(8.3)计算速度输出的均方值

$$\psi^2_{\dot{x}_1}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|H_{\dot{x}_1}(\omega)\right|^2 S_F(\omega)d\omega$$

$$
= \frac{S_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{j2k\omega - jm\omega^3}{2k^2 + j2kc\omega - 6mk\omega^2 - jcm\omega^3 + 2m^2\omega^4}\right|^2 d\omega .
$$

应用典型积分公式(8.4)便可得到

$$
\psi_{\dot{x}_1}^2 = \frac{S_0}{2\pi}\cdot\pi\,\frac{\left\{\begin{array}{l} cm\cdot 4k^2 - 2kc\cdot 2\cdot 2k\cdot m \\ + \dfrac{m^2}{2m^2}(2kc\cdot 6mk - 2k^2cm) \end{array}\right\}}{2kc(6m\cdot cm - 2kc\cdot 2m^2) - 2k^2cm^2}
$$

$$
= \frac{S_0}{2}\cdot\frac{k^2cm}{2k^2c^2m^2}
$$

$$
= \frac{S_0}{4cm} .
$$

同理可求得

$$
\psi_{\dot{x}_2}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|H_{\dot{x}_2}(\omega)\right|^2 S(\omega)d\omega
$$

$$
= \frac{S_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{jk\omega}{2k^2 + j2kc\omega - 6mk\omega^2 - jcm\omega^3 + 2m^2\omega^4}\right|^2 d\omega
$$

$$
= \frac{S_0}{2}\cdot\frac{cm\cdot k^2}{2k^2c^2m^2}
$$

$$
= \frac{S_0}{4cm} .
$$

系统的动能等于两质量动能之和。

$$
T = \frac{1}{2}2m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 .
$$

它是一个随机变量，其平均值为

$$
E[T] = E\left[\frac{1}{2}2m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2\right]
$$

$$= mE\left[\dot{x}_1^2\right] + \frac{1}{2} mE\left[\dot{x}_1^2\right]$$

$$= m\psi^2_{\dot{x}_1} + \frac{1}{2} m\psi^2_{\dot{x}_2}$$

$$= m \cdot \frac{S_0}{4cm} + \frac{1}{2} m \frac{S_0}{4cm}$$

$$= \frac{3S_0}{8c}.$$

习 题 九

9—1 在图9.1所示的双输入线性系统中，已知系统的频率响应函数为：

$$H_1(f) = \frac{2}{5+jf},$$

$$H_2(f) = \frac{3}{5+jf}$$

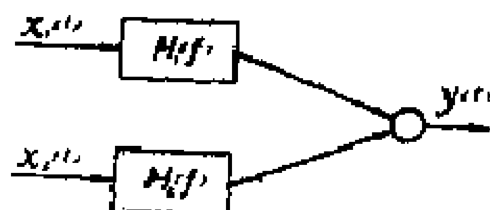


图 9.1

输入的相关函数和谱密度分别为：

$R_1(\tau) = 3\delta(\tau)$,

$G_2(f) = 12$, $G_{12}(f) = 3$,

试计算以下各量：

(a) 两输入的谱相干函数 $\gamma^2_{12}(f)$；

(b) 输出的自相关函数 $R_y(\tau)$ 和自谱密度 $S_y(f)$；

(c) 第一个输入 $x_1(t)$ 与输出 $y(t)$ 间的互相关函数 R_{1y} 和互谱密度 G_{1y}。

9—2 在图9.1所示的双输入线性系统中，已知系统的频率响应函数为

$$H_1(\omega)=\frac{4}{8+jf},\quad H_2(\omega)=\frac{2}{8+jf};$$

若两个输入 $x_1(t)$，$x_2(t)$的谱密度为 $S_{x_1}(\omega)=S_{x_2}(\omega)=S_0$，且 $x_2(t+T)=x_1(t)$，试求输出的谱密度和自相关函数。

9—3　已知某双输入，双输出系统的频率响应矩阵和输入的功率谱矩阵分别为：

$$H(\omega)=\frac{1}{2+j\omega}\begin{bmatrix}2 & 4\\ 5 & 1\end{bmatrix},$$

$$S_{xx}(\omega)=8\begin{bmatrix}1 & e^{-j\omega}\\ e^{-j\omega} & 1\end{bmatrix};$$

试求输出的功率谱矩阵和输出的相关矩阵。

9—4　已知图9.4所示双输入与双输出系统的频率响应矩阵$H(\omega)$为：

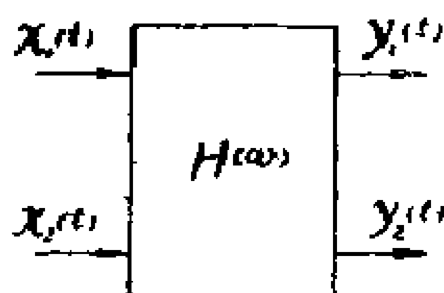


图　9·4

$$H(\omega)=\begin{bmatrix}H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega)\\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega)\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{4+j\omega}\begin{bmatrix}4 & 2\\ 8 & 1\end{bmatrix}.$$

输入的相关函数和谱密度分别为 $R_1(\tau)=2\delta(\tau)$，$S_2(\omega)=4$，$S_{12}(\omega)=2$，试求输出的自相关函数矩阵，谱密度矩阵以及输入，输出的互谱密度矩阵。

9—5　在图9.5所示系统中，已知弹簧的刚度 $k_1=k_2=k$，阻尼系数为 c，两个位移输入 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ 的自谱和互谱密度分别为：$S_{y_1}(\omega)=3$，$S_{y_2}(\omega)=6$，$S_{y_1y_2}(\omega)=2$，若不计两小车的重量，试求两小车位移输出的功率谱密度。

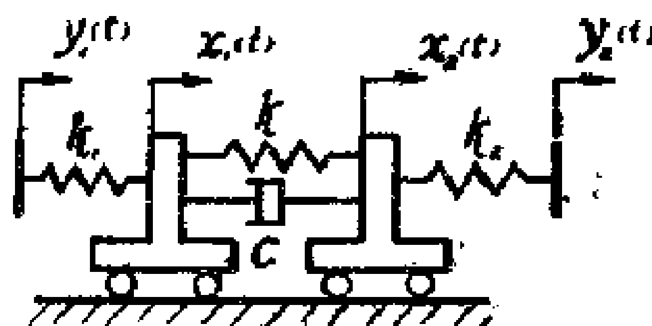


图　9.5

9—6　在题9—5中，若 $k_1=k_2=2k$ 两位移输入有关系：$y_2(t+T)=y_1(t)$ 它们的谱密度为 $S_{y_1}(\omega)=S_{y_2}(\omega)=S_0$(常数)，试确定响应的功率谱密度。

9—7　在9—5题中，若弹簧刚度系数间有关系 $k_1=\dfrac{k_2}{2}=k$，试求这种情况下响应的功率谱密度。

9—8　在图9.8所示的振动系统中，已知弹簧的刚度 k，阻尼器的阻尼系数 C，小车 A 的质量 m；设作用在小车 A 上激振力的功率谱是白噪音谱，即 $S_f(\omega)=S_0$（常数）。若不计小车 B 的质量，试求小车 A 的位移输出的功率谱和平均动能。

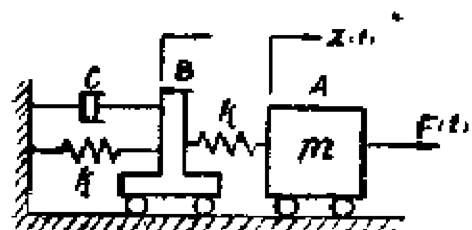


图　9.8

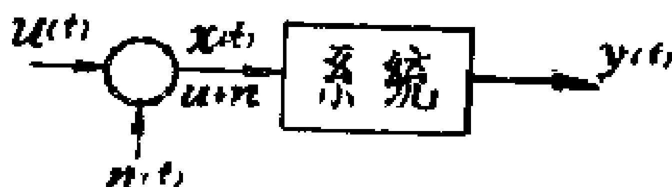


图　9.9

9—9　在图9.9所示系统中，包含在输入信号 $x(t)=$

$u(t)+n(t)$中的真实信号$u(t)$和不相关的干扰信号$n(t)$的谱密度分别为：$S_u(f)=\frac{1}{1+2f^2}$，$S_n(f)=1$，若系统的频率响应函数为：$H(f)=\frac{1}{1-2f+j3f}$试求输出的功率谱密度，真实信号与输出信号的互功率谱密度。

9—10　设测量输入信号$x(t)=u(t)+n(t)$是由真实信号$u(t)$和不相关的噪声分量$n(t)$所组成，这两种信号的单边功率谱分别为：$G_u(f)=\frac{1}{1+4f^2}$，$G_n(f)=5$

若系统的频率响应函数为$H(f)=\frac{1}{1-9f^2+j2f}$，试求输出的功率谱$G_y(f)$，真实信号与输出信号的互功率谱$G_{uy}(f)$和谱相干函数$\gamma^2_{uy}(f)$，以及总输入$x(t)$与输出$y(t)$的谱相干函数$\gamma^2_{xy}(f)$。

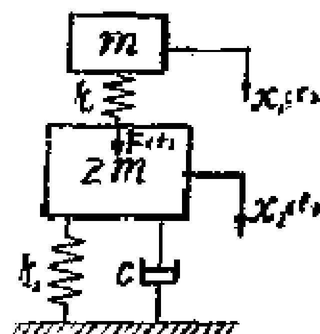


图　9-11

9—11　如图9.11所示系统，输入激振力功率谱$S_F(\omega)=S_0$是理想白噪音，试求输出响应$x_1(t)$和$x_2(t)$的功率谱。

9—12　在图9.12所示的二自由度线性系统中，设输入为力$F(t)$，输出为质量m_1的位移，若输入$F(t)$为白噪音，其功率谱$S_F(\omega)=S_0$，求质量m_1的平均动能。

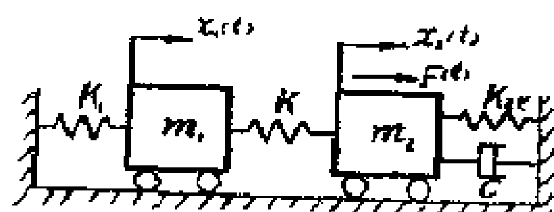


图　9-12

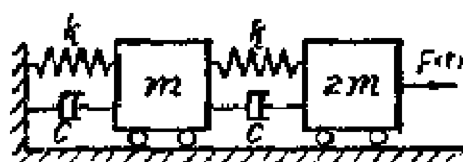


图　9-13

9—13　在图9.13所示系统中，输入激发$F(t)$是具有零均值的遍历随机过程，其功率谱$S_F(\omega)=S_0$是理想的白噪音，若$c\ \ 0.02\sqrt{km}$，试求响应$x_1(t)$和$x_2(t)$的均方值$\psi^2_{x_1}$，$\psi^2_{x_2}$。

9—14　在图9.11所示的系统中，输入的干扰力$F(t)$可以认为是具有零均值的遍历随机过程，已知它的功率谱$S_F(\omega)=S_0$是理想的白噪音，试求响应$x_1(t)$和$x_2(t)$的速度均方值$\psi^2_{\dot{x}_1}$，$\psi^2_{\dot{x}_2}$。

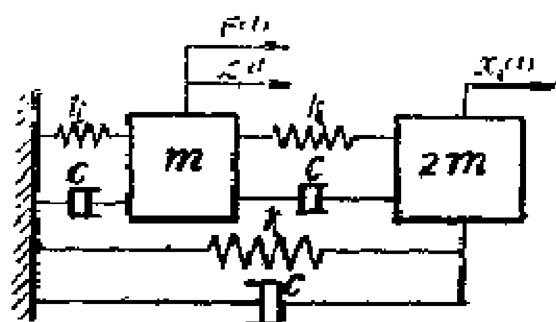


图　9 14

9—15　根据9—1题中各量，计算常凝聚函数。

9—16　在9—1题的输出中包含有附加噪音$Z(t)$，若它的功率谱是：$S_Z(f)=\dfrac{19}{25+f^2}$，试求输出$y(t)$与所有输入$x_1(t)$，$x_2(t)$的多重谱相干函数图。(图9.16)

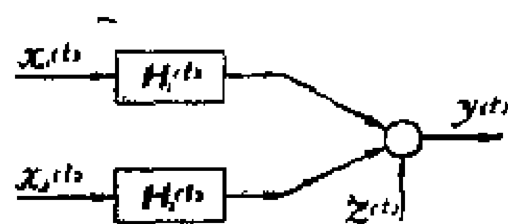


图　9 16

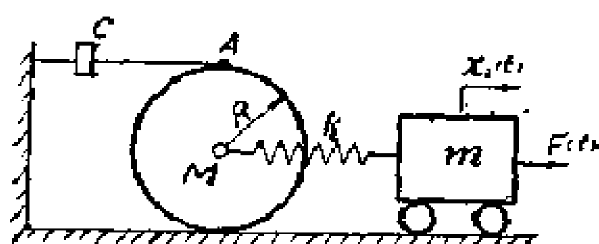


图　9·17

9—17　图9.17所示振动系统中的圆柱只能在水平面上滚动而不滑动，在A点有阻尼器与固定墙壁相联，在柱心处有弹簧联于小车上。设作用在小上的激振力的谱密度$S_f(\omega)=S_0$(常数)，$M=2m$，已知k，c，R，试求柱心和小

车位移输出$x_1(t)$，$x_2(t)$的功率谱密度矩阵和系统平均功能。

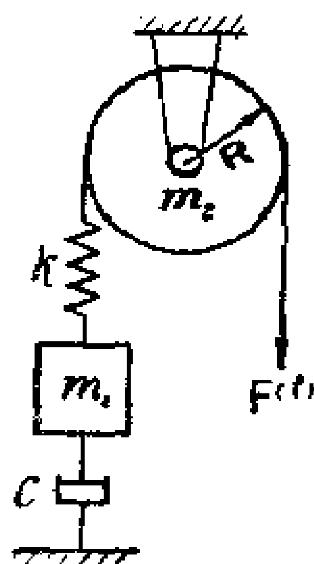


图 9·18

9—18 在图9.18所示的振动系统中，质量$m_2=2m_1$，且半径为R的滑轮，可绕固定轴O转动，质量为m_1的重物下端与阻尼系数为c的阻尼器相连，上端通过弹簧悬挂在绕过滑轮的绳子上。当绳子的另一端受到白噪音功率谱$S_f(\omega)=S_0$的激振力作用时系统将产生振动，试求此系统质量位移输出$x(t)$、滑轮转角输出φ的功率谱矩阵。

9—19 在图9.19所示系统中，设作用在悬挂质量上的激振力谱密度$S_f(\omega)=S_0$是理想的白噪声。已知m，k，c，l，S_0；试求两质量位移输出$x_1(t)$，$x_2(t)$的谱密度和系统的平均动能。

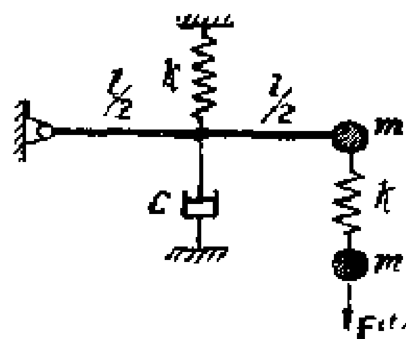


图 9·19

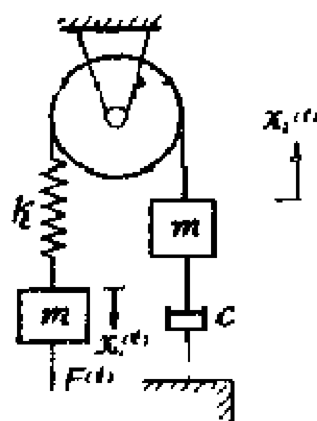


图 9·20

9—20 在图9.20所示的系统中若激振力输入$F(t)$的谱密度$S_y(\omega)=\frac{1}{1+9\omega^2}$，已知$k$，$c$，$m_1=m_2$，若不计

滑轮的质量时，试求两个质量位移输出$x_1(t)$和$x_2(t)$的自谱密度函数$S_{x_1}(\omega)$，$S_{x_2}(\omega)$及系统的平均动能。

9—21　由鼓轮和集中质量组成的振动系统如图9.21所示。已知m，c，R，$k_2=k_1=k$和鼓轮的转动惯量$J=4mR^2$，设作用在小轮绳端的激振力$F(t)$的谱密度$S_F(\omega)=S_0$，试求系统的平均动能。

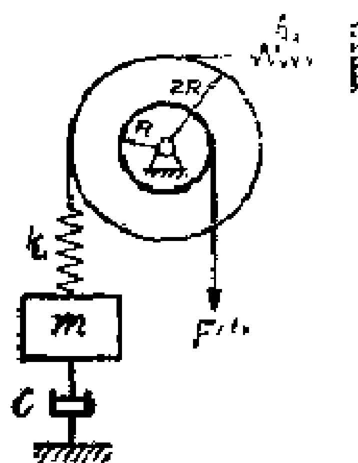


图　9·21

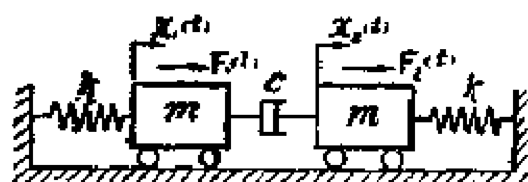


图　9·22

9—22　质量均为m的两小车用阻尼系数为c的阻尼器相连，并分别通过刚度为k的弹簧与两墙壁相连，如图9.22所示。设两小车上激振力输入的谱密度为$S_{11}(\omega)=4$，$S_{22}(\omega)=8$，$S_{12}(\omega)=5$试求两小车位移输出的功率谱。

9—23　在图9.23所示的振动系统中，质量m和弹簧k_1组成主系统，其付系统由质量m_2，弹簧k_2和阻尼器c所构成。设基础的位移输入是均值为零的白噪音谱，试根据响应均方值极小的条件来确定付系统的参数。

9—24　两水平杆AD和BE可分别绕支点A，B转动，用刚度为k的弹簧把他们连接起来。在其自由端各固有集中质量m。并且AD杆还通过阻尼器与上面的固定支座相联，通过弹簧与下面的可动支座相联，如图9.24所示。设可

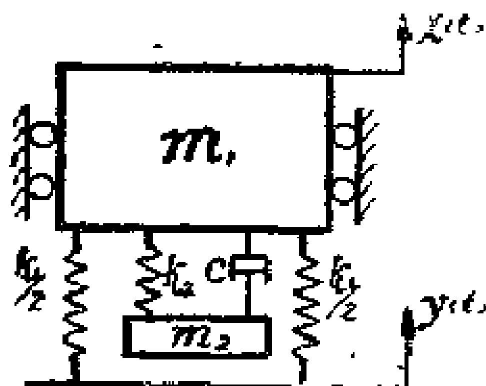


图 9·23

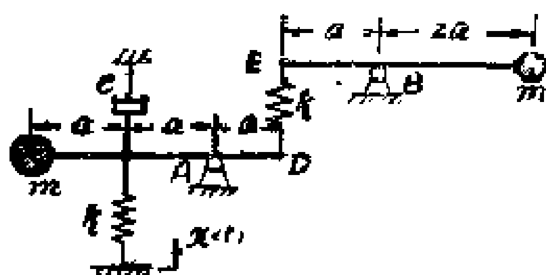


图 9·24

动支座的位移输入 $x(t)$ 的功率谱 $S_x(\omega)=S_0$（常数），在不计两杆的质量时，试求系统的平均动能。

9—25 质量为 m 和 $2m$ 的两个重物固定在不计质量的刚杆 AB 上，杆的 A 端支承在固定的弹簧和阻尼器上，另一端与在活动基础上的弹簧相连。设基础位移随机变化的谱密度 $S_y(\omega)=S_0$ 是理想白噪声谱，已知质量 m，距离 l，两弹

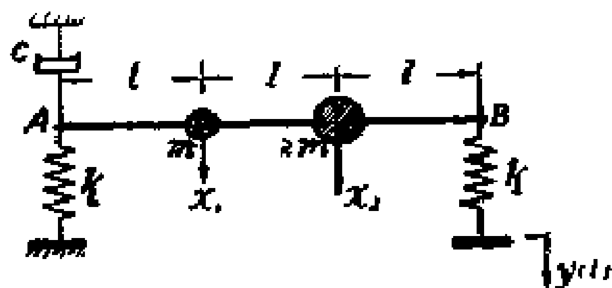


图 9·25

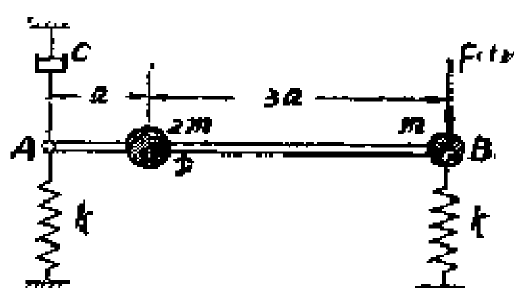


图 9·26

簧刚度均为 k，试求质量位移输出谱密度。(图9.25)。

9—26 在图9.26中，刚杆 AB 由刚度为 k 的两个弹簧支于水平位置，集中质量 $2m$ 和 m 分别固联于杆的 D 点和 B 点。且在 A 端还联有一个阻尼系数为 C 的阻尼器，在杆端质量 B 处有一功率谱密度为 $S_F(\omega)=S_0$ 的激振力作用，试求系统的平均动能和功率谱密度。

9－27　在图9.27中，刚性杆AB长为l，质量为m，下端支于滚轮支座上，顶端用阻尼系数为C的阻尼器和刚度为k的弹簧将杆支于铅垂位置。设作用在下端的激振力的谱密度$S_F(\omega)=S_0$，试求质心位移和绕质心转动输出的功率谱密度。

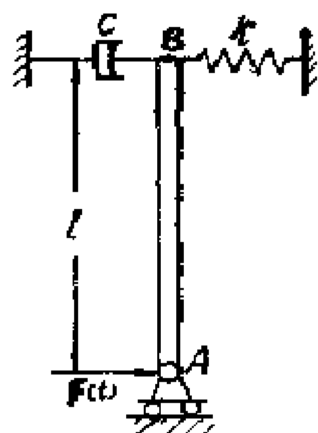


图　9·27

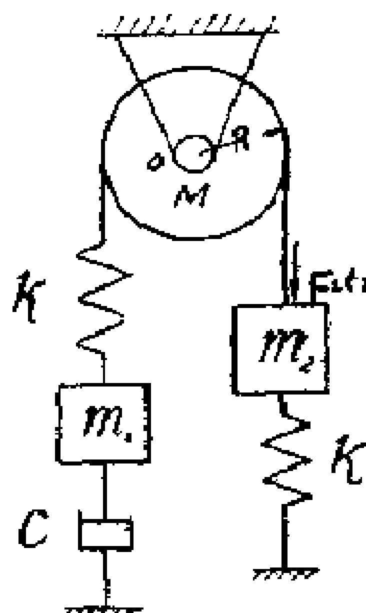


图　9·28

9－28　图9.28所示振动系统中，质量$M=2m_1=2m_2=2m$，且半径为R的滑轮可绕固定轴O转动，质量m_1的重物下端与阻尼器c相连，上端通过弹簧悬挂在绕过滑轮的绳子上，重物m_2下端通过弹簧k固联，m_2上端连在绕过滑轮的绳上，当m_2上受到白噪音功率谱$S_F(\omega)=S_0$的激振力$F(t)$作用时，试求系统的平均动能。

9—29　刚性杆AB长为l，质量为m，用两根刚度为k的弹簧支于A，B两点，且A端还联有一阻尼为C的阻尼器，A处的滚轮支座限制了A端的水平运动，只允许杆绕A点转动。若两弹簧端点支座E，F的随机位移输入的谱密度矩阵是

$$S_x(\omega)=S_0\begin{bmatrix}1 & e^{-i\omega T}\\ e^{i\omega T} & 1\end{bmatrix},$$

其中T是常数，试求系统振动位移输出响应谱密度。

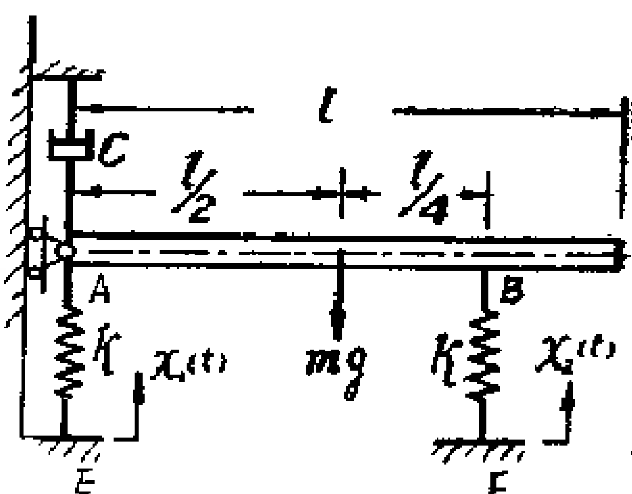


图 9 29

9—30 路面高度Z是水平参考面上点的位置座标(x, y)的函数。许多典型路面的不平度可用相关函数$E\left[Z(x_1, y_1)Z(x_2, y_2)\right]$来表示，它只决定于点($x_1$, y_1)和(x_2, y_2)两点的距离

$$\rho=\sqrt{\{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\}}$$

时，则称这种路面有均匀性和各向同性，并将此相关函数记

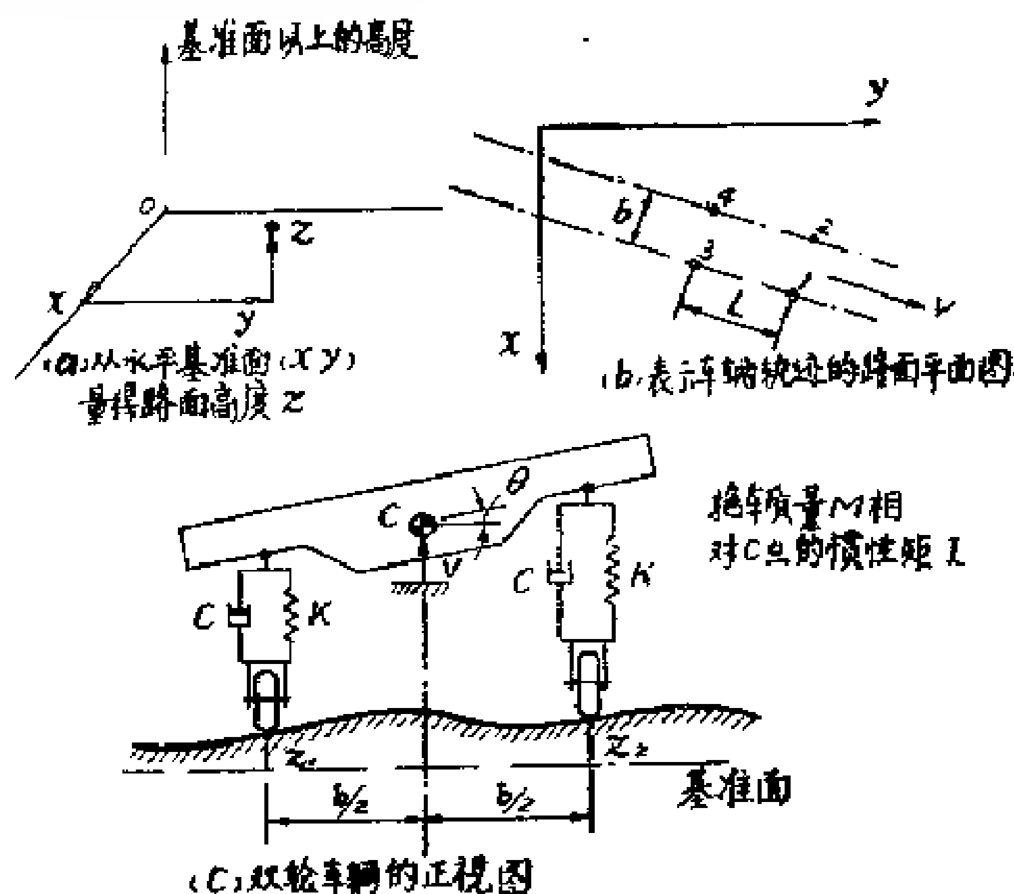


图 9·30

为$R(\rho)$；若已知车速V，轮矩l，轴矩b以及路面的相关函数时，试求汽车在此路面上等速行驶时，四个轮子位移输入的自谱密度$S_1(\omega)$，$S_2(\omega)$，$S_3(\omega)$，$S_4(\omega)$和互谱密度$S_{12}(\omega)$，$S_{13}(\omega)$，$S_{14}(\omega)$等等。轮子的编号如图9.30(b)所示。

9—31　图9.30中的双轮拖车在图示路面上行驶。试写出质心铅垂振动和绕质心微小摆动的运动微分方程。若再令垂直模态的输入为$u=\frac{1}{2}(Z_1+Z_2)$，摆动模态输入$\phi=\frac{1}{b}(Z_2-Z_1)$，试求相应的时间自谱密度$S_u(\omega)$和$S_\phi(\omega)$以及互谱密度$S_{u\phi}$，$S_{\phi u}$。

9—32　在9.31题中，若路面输入的是理想的白噪音谱，此时理想的路面相关函数是$R(\rho)=2\pi S_0\delta(\rho)$试求均方值$\psi^2=E[V^2]$，$\psi_\theta^2=E[\theta^2]$，以及距拖车中心为$b/2$处点的均方位移值。

9—33　在图9.33所示的二自由度线性系统中，设右端弹簧端点位移输入的功率谱密度$S_y(\omega)=S_0$是理想白噪声谱，试求两质量位移输出的功率谱密度和系统的平均动能。

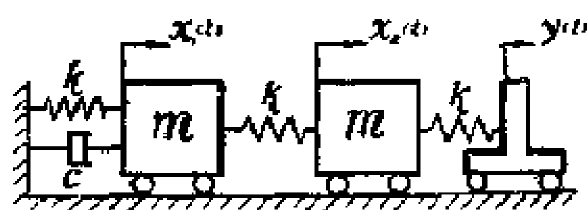


图　9-33

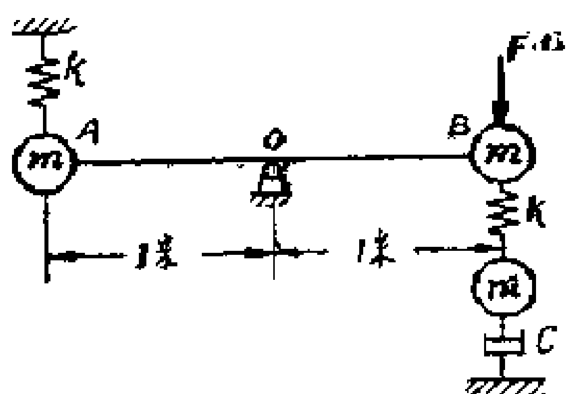


图　9-34

9—34　长2米的无重刚杆AB可绕中间铰链支点O转

动，杆的两端分别固结有质量为m的重球，A端重球通过刚度为k的弹簧与固定面相联，B端重球通过弹簧k和另一质量为m并带阻尼器c的重球相联，若作用在重球B上的干扰力$F(t)$的功率谱$S_{(F)}=S_0$是理想白噪音谱，试求系统位移输出的功率谱密度和平均动能。

9—35　在图9·35中，两根长为L　1米截面惯性矩为J的悬臂梁，其自由端各有一个质量m由刚度为k的弹簧相联。下质量m与阻尼系数为C的阻尼器相联。当上质量受到干扰力$F(t)$作用时，若不计梁本身的质量，试求两质量位移输出的功率谱密度和系统平均动能。

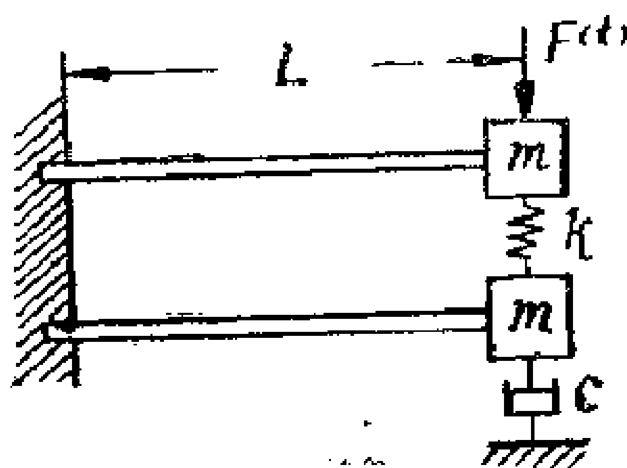


图　9·35

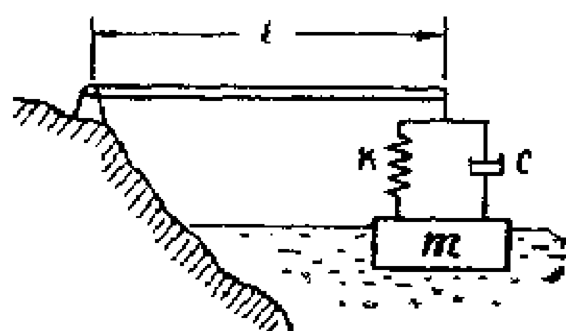


图　9·36

9—36　刚性跳板的质量为$3m$，长$l=4$米，左端用铰链支于地面，右端通过支架支承于浮船上，支架的刚度k，阻尼系数C，浮船质量m，若水浪作用在浮船上的干扰力谱密度$S_F(\omega)=S_0$是理想白噪音谱。试求系统位移输出的功率谱密度。

9—37　如图9·37所示的拖车在不平道路上行驶，已知车箱质量M与车轮质量m的比值$\frac{M}{m}=9$，板簧刚度K与轮胎

刚度 k 之比 $K/k=6$，拖车对 O 点的转动惯量为 $I_0=Ml^2$，O 点无垂直位移，设路面的输入谱密度是理想白噪音谱 $S_y(\omega)=S_0$，试求系统位移输出的功率谱密度。

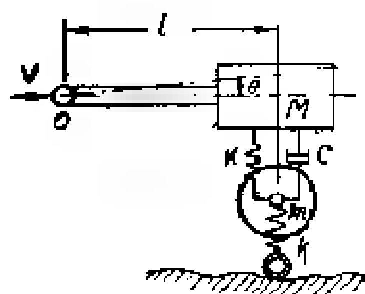


图 9.37

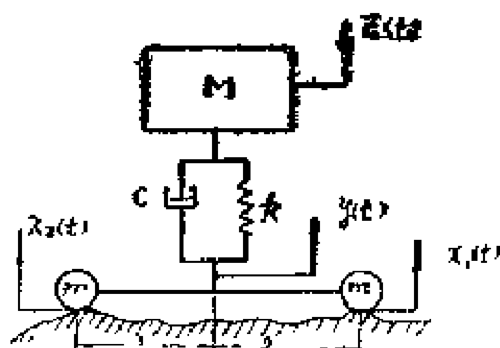


图 9.38

9—38 三轴汽车后悬挂的简化模型如图9.38所示，假定中后轴对称，彼此用平衡悬挂杠杆相连。如果车轮保持着地，且中后轴沿同一路线行驶，则中后轴的路面输入之间有确定关系 $x_2(t)=x_1(t+\tau_0)$，其中 $\tau_0=\dfrac{L}{v}$。已知车箱质量 M，中后轴质量均为 m，弹簧刚度 k 和阻尼系线 C，轮距 $2l$，车速 v，试求车箱位置输出的频率响应函数。设路面输入的功率谱密度为

$$S_x(\omega)=\begin{cases} C_{sp}\omega^{-2} & |\omega|<\omega_m \\ 0 & |\omega|>\omega_m \end{cases}$$

其中 C_{sp} 是表示路面不平度的常数，ω_m 是路面主频带的上限频率，且 $\omega_m\gg\sqrt{\dfrac{k}{M}}$。求车箱加速度输出的均方值。

注：(1) 本题可按单输入求解，也可按双输入求解。

(2) $$\int_0^{\omega_m}\approx\int_0^{\infty}$$

9—39　某汽车可简化为图9.39所示的两自由度振动系统，已知：车身质量$M=294$kg，悬架刚度$k=24500N/m$悬架阻尼系数$c=1372N/m/s$，车轮质量$m=58.8$kg，轮胎刚度$k_t=147000N/m$。设路面的窄带随机输入是正态分布的，其单边空间频率谱密度$G_x(\Omega)=1\times10^{-3}m^2/c/m$的中心频率$\Omega_c=1.5c/m$；带宽$\Delta\Omega=0.1\ c/m$，试求：

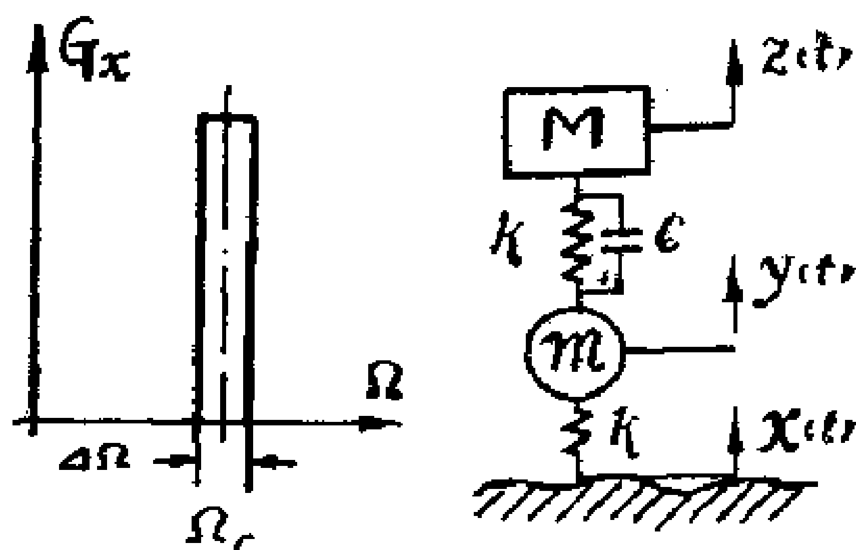


图　9 39

(1) 车轮共振时的车速；

(2) 车轮共振时未捆绑的货物跳离车身地板的概率

(3) 车轮共振时车轮跳离地面的概率。

第十章

非线性随机振动问题

内 容 提 要

§10.1 非线性随机振动

在机械系统的振动问题中，有时不能略去非线性效应而应作为非线性系统来研究。工程中常见的是弹性元件和阻尼元件具有非线性特性的非线性系统。有随机输入的非线性系统的振动问题，一般都比线性随机振动问题复杂得多，不能再应用线性系统的输出与输入关系，而且只有在少数特殊情况下才能求出精确解，因此在大多数情况下一般都采用近似解法。

在非线性随机振动中最一般的精确解法是Fokker-Planck法。由马尔科夫过程理论可以导出系统状态(位移，速度)的转移概率密度函数所满足的Fokker Planck方程，用此方程来求非线性系统响应概率密度函数的方法称为Fokker-Planck方法。

单自由度非线系统的Fokker-Planck方程有如下的型式

$$\frac{\partial p}{\partial t}=-\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial(a_i p)}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial^2(b_{ij}p)}{\partial x_i\partial x_j}, \tag{10.1}$$

其中

p 是系统的转移概率密度函数，在一般情况下它应满足的起始条件为

$$p(x_1,x_2,t_0 \mid x_{10},x_{20},t_0)=\delta(x_1-x_{10})\,\delta(x_2-x_{20})$$

x_1，x_2是系统的状态变量，一般x_1是位移，x_2是速度。

a_i，b_i是系统本身确定的函数，它们可用以下公式来计算：

$$\left.\begin{aligned}
a_1&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{E[\Delta x_1]}{\Delta t},\\
a_2&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{E[\Delta x_2]}{\Delta t},\\
b_{11}&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{E[\Delta x_1^2]}{\Delta t},\\
b_{12}=b_{21}&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{E[\Delta x_1\Delta x_2]}{\Delta t},\\
b_{22}&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{E[\Delta x_2^2]}{\Delta t}.
\end{aligned}\right\}\qquad(10.2)$$

在一般情况下由这些方程解出转移概率密度来确定非线性问题的精确解是很困难的，即使是$\frac{\partial p}{\partial t}=0$，$p$与$x_0$，$\dot{x}_0$，$t$无关的稳态情况下，求解的困难也很大。因此本章不作详细的介绍，仅重点讨论处理非线性随机振动问题的两种近似方法：统计线性化法与摄动近似法。

§10.2 统计线性化法

(一) 单自由度非线性系统

设单自由度非线性系统的输入是一个均值为零的高斯随机过程$y(t)$，系统的输出响应$x(t)$满足如下的非线性微分方程

$$m\ddot{x}+F(x,\dot{x})=y(t), \tag{10.3}$$

统计线性化的方法是将具有零初值$F(0,0)=0$的非线性函数$F(x,\dot{x})$用一线性函数来代替，即

$$F(x,\dot{x})\approx F^*(x,\dot{x})=c\dot{x}+kx, \tag{10.4}$$

其中等效刚度k和等效阻尼系数c由随机函数

$$\varepsilon=F(x,\dot{x})-F^*(x,\dot{x})=F(x,\dot{x})-c\dot{x}-kx$$

的方差σ_ε^2取极小值的条件来确定，即由

$$\sigma_\varepsilon^2=E[\varepsilon^2]$$

$$=\iint_{-\infty}^{\infty}[F(x,\dot{x})-c\dot{x}-kx]^2p_N(x,\dot{x})dxd\dot{x}$$

的极小值条件

$$\frac{\partial\sigma_\varepsilon^2}{\partial c}=2\iint_{-\infty}^{\infty}[F(x,\dot{x})-c\dot{x}-kx]$$

$$\cdot(-\dot{x})p_N(x,\dot{x})dxd\dot{x}=0$$

$$\frac{\partial\sigma_\varepsilon^2}{\partial k}=2\iint_{-\infty}^{\infty}[F(x,\dot{x})-c\dot{x}-kx]$$

$$\cdot(-x)p_N(x,\dot{x})dxd\dot{x}=0,$$

来确定，这时求得

$$k=E[xF(x,\dot{x})]/E[x^2], \tag{10.5}$$

$$c=E[\dot{x}F(x,\dot{x})]/E[\dot{x}^2], \tag{10.6}$$

其中

$$E[xF(x,\dot{x})]=\iint_{-\infty}^{\infty}xF(x,\dot{x})p_N(x,\dot{x})dxd\dot{x},$$

$$E[\dot{x}F(x,\dot{x})]=\iint_{-\infty}^{\infty}\dot{x}F(x,\dot{x})p_N(x,\dot{x})dxd\dot{x},$$

$$E[x^2]=\iint_{-\infty}^{\infty}x^2p_N(x,\dot{x})dxd\dot{x},$$

$$E[\dot{x}^2]=\iint_{-\infty}^{\infty}\dot{x}^2p_N(x,\dot{x})dxd\dot{x},$$

(10.7)

$p_N(x,\dot{x})$——非线性系统的稳态联合密度函数。

将(10.4)式代入(10.3)式得非线性系统的近似系统(即统计线性化系统)应满足的运动微分方程式

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=y(t), \tag{10.8}$$

在统计线性化方法中，用来确定k,c的非线性系统稳态联合概率密度函数$p_N(x,\dot{x})$一般都用统计线性化系统(10.8)的联合概率密度$f(x,\dot{x})$来代替。对于均值为零的正态随机输入，显然，(10.8)的$f(x,\dot{x})$的解析表达式具有如下形式

$$f(x,\dot{x})=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_{\dot{x}}}$$

$$\cdot exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2}+\frac{\dot{x}^2}{\sigma_{\dot{x}}^2}\right)\right\} \tag{10.9}$$

综上所述，可见：对于给定的非线性函数$F(x,\dot{x})$，系统(10.3)可以简化为统计线性化系统来求其近似解，但是确定统计线性化系统的刚度系数k和阻尼系数c时除要利用式(10.5)和(10.6)外，还需要由统计线性化系统(10.8)本身先求出σ_x和$\sigma_{\dot{x}}$的表达式，然后再与(10.5)和(10.6)两式联立解出k，c，σ_x，$\sigma_{\dot{x}}$。

(二) 多自由度非线性系统

用非线性微分方程组

$$
\begin{aligned}
m_1\ddot{x}_1 + F_1(x_1, x_2, \cdots, x_n, \dot{x}_1, \cdots, \dot{x}_n) &= g_1(t) , \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad &= \ \vdots \\
m_n\ddot{x}_n + F_n(x_1, x_2, \cdots, x_n, \dot{x}_1, \cdots, \dot{x}_n) &= g_n(t),
\end{aligned}
\tag{10.10}
$$

描述的非线性系统，按照统计线性化的方法可以简化为如下近似的线性系统

$$
\begin{aligned}
m_1\ddot{x}_1 + \sum_{j=1}^{n} c_{1j}\dot{x}_j + \sum_{j=1}^{n} k_{1j}x_j &= g_1(t) , \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad &= \ \vdots \\
m_n\ddot{x}_n + \sum_{j=1}^{n} c_{nj}\dot{x}_j + \sum_{j=1}^{n} k_{nj}x_j &= g_n(t).
\end{aligned}
\tag{10.11}
$$

其中

$F_i(x_1, x_2, \cdots, x_n; \dot{x}_1, \cdots, \dot{x}_n)$是自变量的非线性函数，且 $F_i(0, 0, \cdots, 0, 0\cdots, 0) = 0$；

$g_i(t)$是均值为零的平稳高斯过程；

c_{ij}，k_{ij}是非线性系统的等效阻尼系数和等效刚度系数，可由随机误差函数

$$
\begin{aligned}
e_1 &= F_1 - \sum_{j=1}^{n} c_{1j}\dot{x}_j - \sum_{j=1}^{n} k_{1j}x_j \\
\vdots \quad & \quad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
e_n &= F_n - \sum_{j=1}^{n} c_{nj}\dot{x}_j - \sum_{j=1}^{n} k_{nj}x_j
\end{aligned}
$$

的方差取极小值的条件

$$\frac{\partial E[\varepsilon\varepsilon^T]}{\partial c_{ij}} = 2E\left[\varepsilon_i \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial c_{ij}}\right] = 2E[\varepsilon_i \dot{x}_j] = 0,$$

$$\frac{\partial E[\varepsilon\varepsilon^T]}{\partial k_{ij}} = 2E\left[\varepsilon_i \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial k_{ij}}\right] = 2E[\varepsilon_i x_j] = 0,$$

来决定 $\varepsilon=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n]^T$，即$c_{ij}$，$k_{ij}$，应满足如下方程组：

$$\sum_{j=1}^{n} k_{1j}E[x_j\dot{x}_k] + \sum_{j=1}^{n} c_{1j}E[\dot{x}_j\dot{x}_k] = E[F_1\dot{x}_k],$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\sum_{j=1}^{n} k_{nj}E[x_j\dot{x}_k] + \sum_{j=1}^{n} c_{nj}E[\dot{x}_j\dot{x}_k] = E[F_n\dot{x}_k].$$

(10.12)

$$\sum_{j=1}^{n} k_{1j}E[x_jx_k] + \sum_{j=1}^{n} c_{1j}E[\dot{x}_jx_k] = E[F_1x_k]$$

$$\vdots \qquad + \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\sum_{j=1}^{n} k_{nj}E[x_jx_k] + \sum_{j=1}^{n} c_{nj}E[\dot{x}_jx_k] = E[F_nx_k]$$

由于确定c_{ij}、k_{ij}的方程组(10.12)与(10.11)式表示的线性系统的协方差有关，因此还必须求出线性化系统的协方差矩阵。

（二） 求线性系统协方差矩阵的代数方法

令$x_i=z_i$， $\dot{x}_i=z_{n+i}$，将(10.11)式化为一阶方程组

$\dot{z}_1 = z_{n+1}$

$$\dot{z}_2 = z_{n+2}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\dot{z}_n = z_{2n}$$

$$\dot{z}_{n+1} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{c_{1j}}{m_1} z_{n+j} - \sum_{j=1}^{n} \frac{k_{1j}}{m_1} z_j + \frac{1}{m_1} g_1(t)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\dot{z}_{2n} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{c_{nj}}{m_n} z_{n+j} - \sum_{j=1}^{n} \frac{k_{nj}}{m_n} z_j + \frac{1}{m_n} g_n(t)$$

此方程可写为矩阵的形式

$$\frac{dz}{dt} = Az + Bg(t) \tag{10.13}$$

式中

$$z = \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \\ z_{n+1} \\ \vdots \\ z_{2n} \end{Bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \end{bmatrix}, \qquad g = \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{Bmatrix}.$$

其中，A为$2n\times 2n$阶矩阵，B为$2n\times n$阶矩阵，M^{-1}为$n\times n$阶

对角矩阵，它是M矩阵的逆矩阵。

设z的协方差矩阵为p

$$p=[p_{ij}]=E[z(t)z^T(t)]$$
$$=E\begin{bmatrix} xx^T & x\dot{x}^T \\ \dot{x}x^T & \dot{x}\dot{x}^T \end{bmatrix} \qquad (10.14)$$

显然，它是正定和对称的$2n\times 2n$阶矩阵，对角线上的元素p_{ii}是系统输出的均方响应，且$p_{i,n+i}=0$，$p_{i,n+j}=-p_{j,n+i}$其中$\frac{n}{2}(3n+1)$个独立未知数p_{ij}可由矩阵方程(10.13)来计算。

由于系统是稳定的，如略去衰减的自由振动部分，矩阵方程(10.13)的稳态强迫振动解为

$$z(t)=\int_0^\infty e^{A\tau}Bg(t-\tau)d\tau \quad , \qquad (10.15)$$

若激励矢量$g(t)=[g_1(t),g_2(t),\cdots,g_n(t)]$为$n$维高斯白噪声矢量，且$E[g(t)g^T(t+\tau)]=D_0\delta(\tau)$，其中$D_0$是激励的协方差矩阵，于是由(10.14)，(10.15)两式可写出稳态协方差矩阵的表达式

$$p=E[z(t)z^T(t)]$$
$$=E\Big[\Big(\int_0^\infty e^{A\tau}Bg(t-\tau)d\tau\Big)\Big(\int_0^\infty e^{A\tau_1}Bg(t-\tau_1)d\tau_1\Big)^T\Big]$$
$$=E\Big[\int_0^\infty\int_0^\infty e^{A\tau}Bg(t-\tau)g^T(t-\tau_1)B^Te^{A^T\tau_1}d\tau_1d\tau\Big]$$
$$=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{A\tau}B(E[g(t-\tau)g^T(t-\tau_1)])B^Te^{A^T\tau_1}$$

$$\cdot d\tau_1 d\tau$$

$$=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{A\tau} B D_0 \delta(\tau_1-\tau) B^T e^{A^T\tau_1} d\tau_1 d\tau$$

$$=\int_0^{\infty} e^{A\tau} B D_0 \int_0^{\infty} \delta(\tau_1-\tau) B^T e^{A^T\tau_1} d\tau_1 d\tau$$

$$\int_0^{\infty} e^{A\tau} B D_0 B^T e^{A^T\tau} d\tau = \int_0^{\infty} F(\tau) d\tau, \quad (10.16)$$

其中$F(\tau) = e^{A\tau} B D_0 B^T e^{A^T\tau}$, (10.17)

且 $F(0) = BD_0B^T$, $F(\infty) = 0$.

对(10.17)式求导

$$\frac{dF}{dt} = AF(t) + F(t)A^T,$$

并在$(0, \infty)$上积分，便可将稳态协方差矩阵的积分表达式(10.16)化为代数方程

$$Ap + pA^T = -BD_0B^T, \quad (10.18)$$

只要从(10.18)式中找出$\frac{n}{2}(3n+1)$个独立的方程，就可确定$\frac{n}{2}(3n+1)$个独立的未知数p_{ij}。

(四) 解题步骤和实例

用统计线性化方法解随机振动问题的步骤如下：

1. 分析力和运动，建立系统的运动微分方程式。

2. 对单自由度系统令$F(x,\dot{x}) \approx F^*(x,\dot{x}) = c\dot{x} + kx$，按公式(10.5)(10.6)写出$c$，$k$的表达式，对多自由度系统，则根据(10.12)式求出c_{ij}和k_{ij}的表达式，将非线性系统化为统计线性系统。

3. 引入新的状态变量$z_i = x_i$，$z_{n+i} = \dot{x}_i$将统计线性系统的微分方程化为微分方程组。并确定矩阵z、A、B。

4．建立矩阵方程(10.18)，计算协方差矩阵，确定输出的均方响应表达式。

5．根据2，4两步的计算结果联立求解 k，c，σ_x，$\sigma_{\dot{x}}^2$ 或 k_{ij}，c_{ij}，σ_{xi}，$\sigma_{\dot{x}i}^2$ 等。

例10.1 求白噪声激振的线性单自由度系统的稳态均方响应．系统所满足的微分方程设为 $m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=y(t)$

解：令 $x=z_1$，$\dot{x}=z_2$，则系统的运动方程将变为一阶方程组的形式：

$$\dot{z}_1=z_2$$

$$\dot{z}_2=-\frac{k}{m}z_1-\frac{c}{m}z_2+\frac{1}{m}y(t)$$

或写为如下的矩阵形式：

$$\frac{dz}{dt}=Az+By(t)\quad, \tag{1}$$

其中 $z=\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

将(2)式代入(10.18)式得

$$\begin{bmatrix} 0 & p_{22} \\ -\frac{k}{m}p_{11} & -\frac{c}{m}p_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & -\frac{k}{m}p_{11} \\ p_{21} & -\frac{c}{m}p_{22} \end{bmatrix}$$

$$=-\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{D_0}{m^2} \end{bmatrix};$$

或

$$\begin{bmatrix} 0 & p_{22}-\dfrac{k}{m}p_{11} \\ p_{22}-\dfrac{k}{m}p_{11} & -2\dfrac{c}{m}p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{D_0}{m^2} \end{bmatrix},$$

由此可写出关于p_{11}，p_{22}的两个独立方程

$$-\frac{k}{m}p_{11}+p_{22}=0$$

$$-2\frac{c}{m}p_{22}=-\frac{D_0}{m^2}.$$

解此二元代数方程组可得稳态的均方响应

$$p_{11}=\sigma_x^2=E[x^2]=\frac{D_0}{2ck},$$

$$p_{22}=\sigma_{\dot{x}}^2=E[\dot{x}^2]=\frac{D_0}{2cm}.$$

此结果与用经典的频域法求得的结果一致。

例10.2 若某单自由度非线性系统的运动微分方程为

$$m\ddot{x}+c_0\dot{x}^2 sign\,\dot{x}+k_0x=y(t), \qquad (1)$$

试用统计线性化方法求在白噪声激振下的稳态均方响应。

解： 由已知的运动微分方程(1)可写出系统的非线性函数

$$F(x,\dot{x})=k_0x+c_0\dot{x}^2 sign\,\dot{x}, \qquad (2)$$

将(2)式，(10.9)式，(10.7)式代入(10.5)，(10.6)两式，确定统计线性化系统的微分方程

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=y(t) \qquad (3)$$

的等效刚度k和阻尼系数c的表达式

$$k = k_0, \quad c = \frac{4c_0\sigma_x^2}{\sqrt{2\pi}}; \tag{4}$$

在例10.1中已求出统计线性系统(3)的均方响应

$$\sigma_x^2 = p_{11} = \frac{D_0}{2ck}, \tag{5}$$

$$\sigma_{\dot{x}}^2 = p_{22} = \frac{D_0}{2cm}. \tag{5}$$

联立求解方程组(4)和(5)可得

$$k = k_0, \quad c = \left(\frac{4c_0{}^2D_0}{\pi m}\right)^{\frac{1}{3}}, \tag{6}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2k_0}\left(\frac{\pi m D_0{}^2}{4c_0{}^2}\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$\sigma_{\dot{x}}^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{2\pi D_0{}^2}{c_0{}^2m^2}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{7}$$

例10.3　设某单自由度线性系统的运动微分方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = y(t). \tag{1}$$

在有色噪声输入的激励下输入的自相关函数

$R(\tau) = D_0e^{-\alpha|\tau|}$，若已知系统的质量$m$，阻尼系数$c$和刚度系数$k$，试求系统的稳态均方响应$\sigma_x^2$和$\sigma_{\dot{x}}^2$。

解：相关函数为$R(\tau) = D_0e^{-\alpha|\tau|}$的有色噪声$y(t)$可表为如下形式

$$\frac{dy}{dt} = -\alpha y(t) + \sqrt{2\alpha}\cdot n(t) \tag{2}$$

其中$n(t)$为白噪声，其相关函数为$D_0\delta(\tau)$。

令$z_1 = x$，$z_2 = \dot{x}$，$z_3 = y(t)$，
则可将方程(1)，(2)变成一阶微分方程组

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2, \\
\dot{z}_2 &= -\frac{k}{m} z_1 - \frac{c}{m} z_2 + \frac{1}{m} z_3, \qquad (3) \\
\dot{z}_3 &= -\alpha z_3 + \sqrt{2\alpha} \cdot n(t).
\end{aligned}
$$

写成矩阵的形式为

$$
\frac{dz}{dt} = Az + Bn(t).
$$

其中

$$
z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 & -\alpha \end{pmatrix},
$$

$$
B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2\alpha} \end{pmatrix} \qquad (4)
$$

而协方差矩阵为

$$
p = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & p_{13} \\ 0 & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix}. \qquad (5)
$$

将(4)、(5)代入公式(10.18)可得确定均方值的代数方程

组

$$-\frac{k}{m}p_{11}+\frac{1}{m}p_{13}+p_{22}=0,$$

$$-2\frac{c}{m}p_{22}+\frac{2}{m}p_{23}=0,$$

$$\alpha p_{13}+p_{23}=0, \tag{6}$$

$$\alpha p_{23}-\frac{k}{m}p_{13}-\frac{c}{m}p_{23}+\frac{1}{m}p_{33}=0,$$

$$-2\alpha p_{33}=-2\alpha D_0.$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} -\frac{k}{m} & \frac{1}{m} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2c}{m} & \frac{2}{m} & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{k}{m} & 0 & -\left(\alpha+\frac{c}{m}\right) & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{13} \\ p_{22} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2\alpha D_0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

由此可解出

$$
\begin{aligned}
p_{11} &= \frac{D_0(\alpha m + c)}{kc(m\alpha^2 + c\alpha + k)}, \\
p_{22} &= \frac{D_0\alpha}{c(m\alpha^2 + c\alpha + k)}, \\
p_{13} &= \frac{D_0}{m\alpha^2 + c\alpha + k}, \\
p_{23} &= \frac{D_0\alpha}{m\alpha^2 + c\alpha + k}, \\
p_{33} &= D_0 ;
\end{aligned}
\qquad (8)
$$

其中p_{11}，p_{22}即系统的位移和速度输出的均方响应σ_x^2，$\sigma_{\dot{x}}^2$

例10.4　设非线性系统的微分方程为

$$
m\ddot{x} + c_0\dot{x}^2 \mathrm{sign}\,\dot{x} + k_0 x = y(t) \qquad (1)
$$

其中输入$y(t)$是均值$\mu_y=0$和相关函数$R_y(\tau)=D_0e^{-\alpha|\tau|}$的有色噪声。若已知物体质量为$m$，线性阻尼系数为$c_0$，线性刚度系数为$k_0$，试用统计线性化法求系统输出的均方响应$\sigma_x^2$和$\sigma_{\dot{x}}^2$。

解：在例10.2中已求出其近似系统的微分方程为

$$
m\ddot{x} + \frac{4c_0\sigma_{\dot{x}}}{\sqrt{2\pi}}\dot{x} + k_0 x = y(t), \qquad (2)
$$

将(2)式与例10.3的(1)式相比较，得

$$
m = m, \quad c = \frac{4c_0\sigma_{\dot{x}}}{\sqrt{2\pi}}, \quad k = k_0, \qquad (3)
$$

把它们代入例10.3的（8）式，便可求出位移和速度的均方响应

$$p_{22}=\sigma_{\dot{x}}^{2}=\frac{D_0 a}{\dfrac{4c_0\sigma_{\dot{x}}}{\sqrt{2\pi}}\left(ma^2+\dfrac{4c_0\sigma_{\dot{x}}}{\sqrt{2\pi}}a+k_0\right)} \qquad (4)$$

$$p_{11}=\sigma_x^2=\frac{D_0\left(am+\dfrac{4c_0\sigma_{\dot{x}}}{\sqrt{2\pi}}\right)}{k_0\dfrac{4c_0\sigma_{\dot{x}}}{\sqrt{2\pi}}\left(ma^2+\dfrac{4c_0\sigma_{\dot{x}}}{\sqrt{2\pi}}a+k_0\right)} \qquad (5)$$

将（4）式简化为关于$\sigma_{\dot{x}}$的四次代数方程

$$\sigma_{\dot{x}}^4+\frac{\sqrt{2\pi}}{4c_0 a}(ma^2+k_0)\sigma_{\dot{x}}^3=\frac{\pi D_0}{8c_0^2}$$

用近似方法解出$\sigma_{\dot{x}}$后，再代入（5）式，便可求得σ_x^2。

§10.3 摄动法

在非线性随机振动系统中，当非线性部分较小时，用摄动法处理这种问题是很有效的。

若某非线性系统可用如下运动微分方程

$$\ddot{x}+2\xi\omega_0\dot{x}+\omega_0^2 x+\varepsilon f(x,\dot{x})=y(t) \qquad (10.19)$$

来描述。其中，$f(x,\dot{x})$是一个非线性函数，ε是一个足够小的参数，$y(t)$是高斯随机输入。

用摄动法求解时通常是把这种方程(10.19)的解展成ε的幂级

数 $$x(t)=x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+\varepsilon^2 x_2(t)+\cdots, \quad (10.20)$$

把(10.20)式代入(10.19)式，并将ε同次幂的项归并在一起得

$$\begin{aligned}&(\ddot{x}_0+2\xi\omega_0\dot{x}_0+\omega_0^2x_0-y(t))\\&+\varepsilon[\ddot{x}_1+2\xi\omega_0\dot{x}_1+\omega_0^2x_1+f(x_0,\dot{x}_0)]\\&+\varepsilon^2\Big[\ddot{x}_2+2\xi\omega_0\dot{x}_2+\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_0 x_1\\&+\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\Big|_0\dot{x}_1\Big]+\varepsilon^3(\ddot{x}_3+\cdots)+\cdots=0 \quad (10.21)\end{aligned}$$

其中$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_0$和$\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\Big|_0$表示在$x(t)=x_0(t)$和$\dot{x}(t)=\dot{x}_0(t)$时$f(x,\dot{x})$的两个偏导数。

由于(10.21)式右端为零，因此ε各次幂的系数全都等于零。由此便得如下的微分方程组

$$\begin{aligned}&\ddot{x}_0+2\xi\omega_0\dot{x}_0+\omega_0^2x_0=y(t),\\&\ddot{x}_1+2\xi\omega_0\dot{x}_1+\omega_0^2x_1=-f(x_0,\dot{x}_0),\\&\ddot{x}_2+2\xi\omega_0\dot{x}_2+\omega_0^2x_2=-\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_0 x_1\\&\qquad+\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\Big|_0\dot{x}_1\Big), \quad (10.22)\\&\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\end{aligned}$$

此方程组表明给出$x(t)$展开式(10.20)中每一项都可以成为一个具有随机输入的线性系统，依次由方程组(10.22)中的各式可求得各系统的输出

$$x_0(t)=\int_0^\infty y(t-\tau)h(\tau)d\tau,$$

$$x_1(t)=-\int_0^\infty f(x_0(t-\tau),\dot{x}_0(t-\tau))h(\tau)d\tau,\quad(10.23)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

其中$h(\tau)=\frac{1}{mp'}e^{-\xi\omega_0\tau}\sin p'\tau$是系统的脉冲响应函数；

$$p'=\omega_0\sqrt{1-\xi^2},\quad \omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}},\quad \xi=\frac{c}{2\sqrt{mk}}.$$

在一般情况下由公式(10.23)求得解(10.20)中的每一个x_i比较困难，对于很多实际问题只要求出它的一次近似解

$$x(t)=x_0(t)+\varepsilon x_1(t),\qquad(10.24)$$

就能满足工程要求了。此时，系统的均方值可表示为

$$E[x^2]=E[x_0^2]+2\varepsilon E[x_0x_1],\qquad(10.25)$$

这样就把求原非线性系统的均方值问题转化为求x_0的均方值和x_0与x_1之积的均值问题了，而它们是两个较易求解的线性问题。

由(10.23)的第一式可得

$$E[x_0^2]=\int_0^\infty\int_0^\infty h(\tau_1)h(\tau_2)E[y(t-\tau_1)y(t-\tau_2)]d\tau_1d\tau_2\qquad(10.26)$$

由(10.23)的第二式可得

$$E[x_0x_1]=-\int_0^\infty h(\tau)E[f(x_0(t-\tau),\dot{x}_0(t-\tau))x_0(t)]d\tau.\qquad(10.27)$$

由此可归纳出用摄动法求解非线性随机振动的解题步骤

1. 建立系统带微小参数的非线性运动微分方程并确定弱非线性函数.

2. 略去弱非线性部分，然后确定所得线性系统的脉冲响应函数。

3. 用公式(10.23)计算输出展开式(10.20)中各随机变量x_0, x_1, …

4. 用公式(10.26), (10.27)计算x_0的均方值和x_0与x_1之积的均值。

5. 用公式(10.25)确定一次近似的均方值。

例10.5 设某非线性系统的微分方程为

$$\ddot{x}+2\xi p\dot{x}+p^2x+\varepsilon p^2x^3=y(t)\,, \qquad (1)$$

其中$y(t)$是均值为零，相关函数为$R(\tau)=D_0\delta(t)$的高斯白噪声，试用摄动法求系统的近似均方响应ψ_x^2。

解：由方程(1)可确定系统的弱非线性函数为

$$f(x,\dot{x})=p^2x^3 \qquad (2)$$

将输入的自相关函数$R(\tau)=D_0\delta(t)$代入(10.26)，得

$$\begin{aligned}
E[x_0^2(t)] &= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}h(\tau_1)h(\tau_2)E[y(t-\tau_1)\\
&\qquad y(t-\tau_2)]d\tau_1 d\tau_2\\
&= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}h(\tau_1)h(\tau_2)R(\tau_1-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2\\
&= \int_0^{\infty}h(\tau_1)\int_0^{\infty}h(\tau_2)\,\delta(\tau_1-\tau_2)D_0 d\tau_2 d\tau_1\\
&= \int_0^{\infty}D_0h^2(\tau_1)d\tau_1\\
&= R_{x_0}(0)\,,
\end{aligned} \qquad (3)$$

式中$h(\tau)=\dfrac{1}{p'}e^{-\xi pt}\sin p't \qquad (4)$

是系统的脉冲响应函数。

将(2)式代入公式(10.23)的第二式，得

$$x_1(t) = -\int_0^\infty p^2 x_0^3(t-\tau)h(\tau)d\tau \ , \qquad (5)$$

于是可把x_0x_1的均值写为。

$$E[x_0 x_1] = E[x_0\int_0^\infty p^2 x_0^3(t-\tau)h(\tau)d\tau]$$

$$= -p^2\int_0^\infty h(\tau)E[x_0(t)x_0^3(t-\tau)]d\tau$$

$$(6)$$

由(10.23)式求得

$$x_0(t) = \int_0^\infty y(t-\tau)h(\tau)d\tau \ . \qquad (7)$$

将其代入(6)式，得

$$E[x_0 x_1] = -p^2\int_0^\infty h(\tau)d\tau\int_0^\infty h(\tau_1)d\tau_1$$

$$\cdot\int_0^\infty h(\tau_2)d\tau_2\int_0^\infty h(\tau_3)d\tau_3$$

$$\cdot\int_0^\infty h(\tau_4)d\tau_4\cdot E[y(t-\tau_1)y(t-\tau-\tau_2)$$

$$\cdot y(t-\tau-\tau_3)\cdot y(t-\tau-\tau_4)] \qquad (8)$$

对于均值为零的平稳高斯过程，式中的四次矩可用其互相关函数表示如下：

$$E\left[y(t-\tau_1)y(t-\tau-\tau_2)y(t-\tau-\tau_3)y(t-\tau-\tau_4)\right]$$

$$= R_y(\tau+\tau_2-\tau_1)R_y(\tau_4-\tau_3)$$

$$+R_y(\tau+\tau_3-\tau_1)R_y(\tau_4-\tau_2)+R_y(\tau+\tau_4-\tau_1)$$

$$\cdot R_y(\tau_3-\tau_2) \qquad (9)$$

又知

$$\int_0^\infty h(\tau)d\tau\int_0^\infty h(\tau_1)d\tau_1\int_0^\infty h(\tau_2)d\tau_2$$

$$\int_{0}^{\infty}h(\tau_3)d\tau_3\int_{0}^{\infty}h(\tau_4)d\tau_4\cdot R_y(\tau+\tau_2-\tau_1)$$

$$R_y(\tau_1\ \ \tau_3)$$

$$=\int_{0}^{\infty}h(\tau)d\tau\iint_{0}^{\infty}h(\tau_1)h(\tau_2)R(\tau+\tau_2-\tau_1)$$

$$d\tau_2 d\tau_1\int_{0}^{\infty}h(\tau_3)d\tau_3\int_{0}^{\infty}h(\tau_4)R(\tau_4-\tau_3)d\tau_4$$

$$=\int_{0}^{\infty}h(\tau)R_{x_0}(\tau)d\tau\int_{0}^{\infty}h(\tau_3)h(\tau_3)D_0 d\tau_3$$

$$=R_{x_0}(0)\int_{0}^{\infty}h(\tau)R_{x_0}(\tau)d\tau \qquad (10)$$

根据(9)，(10)式中所示的关系，可把(8)式简化为

$$E[x_0x_1]=-3p^2R_{x_0}(0)\int_{0}^{\infty}h(\tau)R_{x_0}(\tau)d\tau \qquad (11)$$

其中线性系统(10.22)的输出自相关函数可由公式(8.5)来确定

$$R_{x_0}(\tau)=E[x_0(t)x_0(t-\tau)]$$

$$=\int_{0}^{\infty}h(\tau_1)h(\tau_2)R_y(\tau-\tau_1+\tau_2)d\tau_1 d\tau_2$$

$$=D_0\int_{0}^{\infty}h(\tau_1)h(\tau-\tau_1)d\tau_1$$

$$=\sigma_{x_0}^2\exp\{\xi p\tau\}$$

$$\left[\cos p'\tau+\frac{\xi p}{p'}\sin p'\tau\right] \qquad (12)$$

将(3)和(11)两式代入公式(10.25)，得所求的一次近似均方响应

$$E[x^2]=E[x_0^2]+2\varepsilon E[x_0x_1]$$

$$=R_{x_0}(0)[1-6\varepsilon p^2\int_{0}^{\infty}h(\tau)R_{x_0}(\tau)d\tau] \qquad (13)$$

将(1)式[illegible]积分，得

$$[illegible]$$

习　题

10—1　用统计线性化法，求如下硬弹簧振子在白噪声激振时的稳态均方响应

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+k(x+\varepsilon x^3)=f(t),$$

假定$E[f(t)]=0$，$R(\tau)=D_0\delta(\tau)$。

10—2　用统计线性化法求上题非线性系统在有色噪声激振时的稳态均方响应。假定$E[f(t)]=0$，$R(\tau)=D_0 e^{-\alpha|\tau|}$。

10—3　用摄动法求如下非线性阻尼系统在白噪声$f(t)$激振时的稳态均方响应

$$\ddot{x}+\beta(\dot{x}+\varepsilon\dot{x}^3)+\omega_0^2x=f(t),$$

假定$E[f(t)]=0$，$R(\tau)=D_0\delta(t)$。

10—4　用统计线性化法解上题，并与上题结果作比较。

10—5　求下述二自由度线性系统当主系统受随机力$f(t)$（白噪声$E[f(t)]=0$，$R(\tau)=D_0\delta(t)$）作用时协方差矩阵。

$$m_1\ddot{x}_1+(c_1+c_2)\dot{x}_1-c_2\dot{x}_2+(k_1+k_2)x_1-k_2x_2=f(t),$$

$$m_2\ddot{x}_2-c_2\dot{x}_1+c_2\dot{x}_2-k_2x_1+k_2x_2=0,$$

（作为另一个练习，此题可用相对位移$y_1=x_1$，$y_2=x_2-x_1$

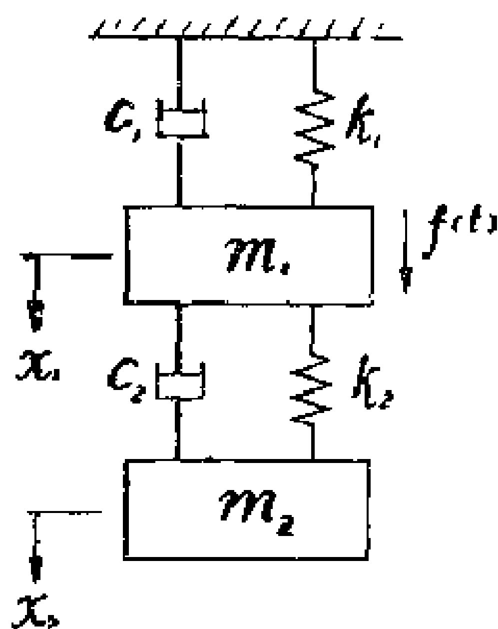


图 10.5

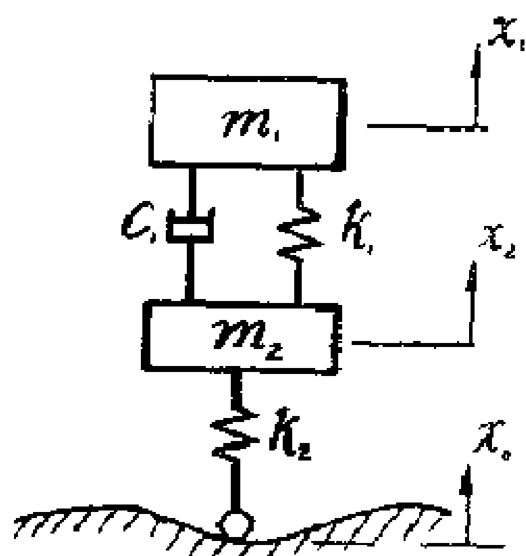


图 10.6

然后求 y 的协方差矩阵)

10.6 求下述二自由度线性系统在随机位移 x_0 激振时的协方差矩阵。(图10.6):

① 假定 x_0 为白噪声($E[x_0]=0$,

$$R_{x_0}(\tau)=D_0\delta(\tau))\ ;$$

② 假定 x_0 为有色噪声($E[x_0]=0$,

$$R_{x_0}(\tau)=D_0 e^{-\alpha|\tau|}\ )$$

$$m_1\ddot{x}_1+c_1(\dot{x}_1-\dot{x}_2)+k_1(x_1-x_2)=0\ ,$$

$$m_2\ddot{x}_2-c_1(\dot{x}_1-\dot{x}_2)-k_1(x_1-x_2)+k_2x_2=k_2x_0.$$

(亦可用 $y_1=x_1-x_2$, $y_2=x_2$ 变换为 y 的方程来作。)

10—7 求如下单非线性二自由度系统在随机力 $f(t)$(白噪声:$E[f(t)]=0$,$R_f(\tau)=D_0\delta(\tau)$)作用下稳态均方响应。(图10.7):

$$m_1\ddot{x}_1=c_2(\dot{x}_2-\dot{x}_1)-k_1x_1-k_2[(x_2-x_1)$$

$$+\varepsilon(x_2-x_1)^3]=f(t),$$

$$m_2\ddot{x}_2+c_2(\dot{x}_2-\dot{x}_1)+k_2[(x_2-x_1)+\varepsilon(x_2-x_1)^3]$$

$$=0,$$

提示：令$y_1=x_1$，$y_2=x_2-x_1$，（相对位移），变换成y的方程来作较方便，在求出y的均方响应后再利用简单关系：$E[x_1^2]=E[y_1^2]$，$E[x_2^2]=E[(y_1+y_2)^2]=E[y_1^2]+E[y_2^2]+2E[y_1y_2]$，…，即可求出各均方响应。

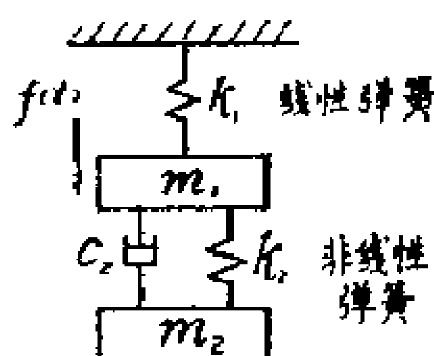


图 10·7

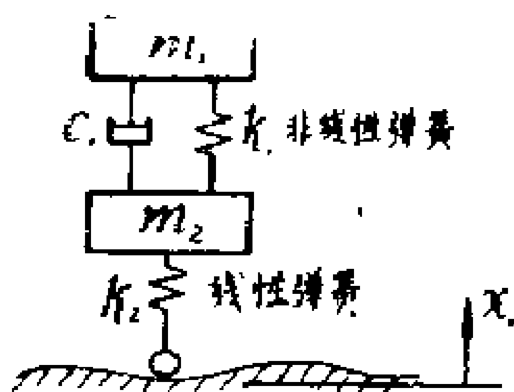


图 10·8

10—8　求下述非线性系统在随机位移x_0激振时的稳态均方响应（图10.8），假定$E[x_0]=0$，$R_{x_0}(\tau)=D_0e^{-\alpha|\tau|}$，

$$m_1\ddot{x}_1+c_1(\dot{x}_1-\dot{x}_2)+k_1[(x_1-x_2)$$

$$+\varepsilon(x_1-x_2)^3]=0,$$

$$m_2\ddot{x}_2-c_1(\dot{x}_1-\dot{x}_2)-k_1[(x_1-x_2)+\varepsilon(x_1-x_2)^3]$$

$$+k_2x_2=k_2x_0.$$

提示：用座标变换$y_1=x_1-x_2$，$y_2=x_2$。

10—9　某特殊系统的稳态随机振动满足如下的非线性微分方程

$$\ddot{x} + f(H)\dot{x} + g(t) = n(t),$$

其中 $H = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \int_0^x g(\eta)d\eta$；

$f(H)$是H的正增函数；

输入$n(t)$是均值为零的高斯白噪声，其自相关函数

$$R_n(\tau) = 2D_0\,\delta(t)$$

试用Fokker-Planck方法确定稳态概率密度$p_s(x,\dot{x})$的计算公式。

提示：(1) 令$x_1 = x$，$x_2 = \dot{x}$将原方程化为一阶微分方程组

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -f(H)x_2 - g(x_1) + n(t),$$

当$\Delta t \to 0$时，由上方程组可得

$$\begin{cases} \Delta x_1 = x_2 \Delta t, \\ \Delta x_2 = [-f(H)x_2 - g(x_1) + n(t)]\Delta t. \end{cases}$$

将Δx_1，Δx_2代入(10.2)式，并注意$E[n(t)] = 0$，

$R_n(\tau) = 2D_0\delta(t)$，便可求出$a_1 = x_2 = \dot{x}$，

$a_2 = -[g(x_1) + f(H)x_2] = -[g(x) + f(H)\dot{x}]$；

$$b_{11} = b_{12} = b_{21} = 0,\quad b_{22} = 2D_0$$

考虑到稳态情况 $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$，$p = p_s(x,\dot{x})$，便可由(10.1)式列出Fokker-Planck方程。

(2) 分离Fokker-Planck方程，消去$\frac{\partial p}{\partial \dot{x}}$，并注意：

$$dH = d\left[\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \int_0^x g(\eta)\,d\eta\right] = \dot{x}\,d\dot{x} + g(x)\,dx$$

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial \dot{x}}d\dot{x} .$$

即可得到确定转移概率密度的简化方程

$$\frac{dp}{p} = -\frac{1}{D}f(H)dH .$$

10—10　若硬弹簧振子在高斯白噪声激励下的随机振动满足如下的微分方程

$$\ddot{x} + \beta\dot{x} + \omega_0^2(x + \varepsilon x^3) = n(t) .$$

试用Fokker-Planck方法确定转移概率密度函数及系统的一次近似均方响应。

提示：(1)应用10.9题的结果。

(2)将稳态密度函数按ε展开，取一次近似以来计算系统的均方响应。

10—11　一个很小的质量m，置于长度为$2l$的被拉紧着的钢丝AB中间，钢丝内的初拉力为s_0。当质量从其平衡位置发生侧向位移时，钢丝将产生恢复力和受到线性阻尼的作用。试求在白噪声激振力作用下振动的均方响应。

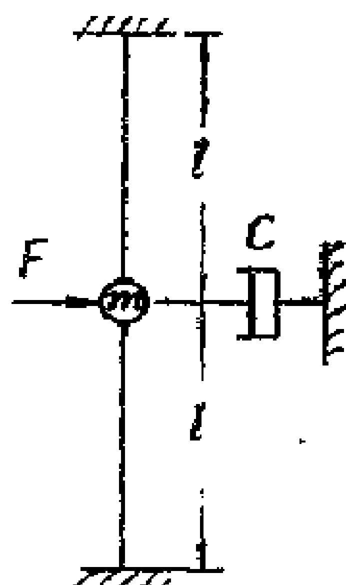


图　10-1

习 题 答 案

第 一 章

1—1 $H(\omega)=\dfrac{1}{k+jc\omega}$. 1—2 $H(\omega)=\dfrac{jc\omega}{k+jc\omega}$.

1—3 $H(\omega)=\dfrac{jc_1\omega}{k-m\omega^2+j(c_1+c)\omega}$.

1—4 $H(\omega)=\dfrac{jc\omega k_1}{k_1k_2+jc\omega(k_1+k_2)}$.

1—5 $H(\omega)=\dfrac{K}{K+jC\omega}$.

1—6 $H(\omega)=\dfrac{3l_1l_2^2-l_2^3}{2(3EJ+jc\omega l_2^3)}$.

1—7 $H(\omega)=\dfrac{R^2}{R^2k-(J_0+R^2m)\omega^2}$.

1—8 $H(\omega)=\dfrac{k_3}{k_1+k_2+k_3-m\omega^2}$.

1—9 $H(\omega)=\dfrac{1}{k-m\omega^2+jc\omega}$.

$$H_{\dot{x}}(\omega)=\frac{j\omega}{k-m\omega^2+jc\omega}.$$

$$H_{\ddot{x}}(\omega)=\frac{-\omega^2}{k-m\omega^2+jc\omega}.$$

1—10 答案见下表

有阻尼质量弹簧系统在基础运动输入下的频率响应函数

频率响应函数 $H(\omega)$ 输入／输出		基础的运动输入		
		位移 $y(t)$	速度 $\dot{y}(t)$	加速度 $\ddot{y}(t)$
输出位移时	绝对位移 $x(t)$	$\frac{k+jc\omega}{k-m\omega^2+jc\omega}$	$\frac{k+jc\omega}{\omega(k-m\omega^2+jc\omega)}$	$\frac{-k-jc\omega}{\omega^2(k-m\omega^2+jc\omega)}$
	相对位移 $z(t)=x(t)-y(t)$	$\frac{m\omega^2}{k-m\omega^2+jc\omega}$	$\frac{jm\omega}{k-m\omega^2+jc\omega}$	$\frac{m}{k-m\omega^2+jc\omega}$
输出速度时	绝对速度 $\dot{x}(t)$	$\frac{j\omega k-c\omega^2}{k-m\omega^2+jc\omega}$	$\frac{k+jc\omega}{k-m\omega^2+jc\omega}$	$\frac{c\omega^2-jk\omega}{\omega^2(k-m\omega^2+jc\omega)}$
	相对速度 $\dot{z}(t)=\dot{x}(t)-\dot{y}(t)$	$\frac{jm\omega^3}{k-m\omega^2+jc\omega}$	$\frac{m\omega^2}{k-m\omega^2+jc\omega}$	$\frac{jm\omega}{k-m\omega^2+jc\omega}$
输出加速度时	绝对加速度 $\ddot{x}(t)$	$\frac{-k\omega^2-jc\omega^3}{k-m\omega^2+jc\omega}$	$\frac{j\omega k-c\omega^2}{k-m\omega^2+jc\omega}$	$\frac{k+jc\omega}{k-m\omega^2+jc\omega}$
	相对加速度 $\ddot{z}(t)=\ddot{x}(t)-\ddot{y}(t)$	$\frac{m\omega^4}{k-m\omega^2+jc\omega}$	$\frac{-jm\omega^3}{jc\omega(k-m\omega^2+jc\omega)}$	$\frac{m\omega^2}{k-m\omega^2+jc\omega}$

1—11 $H(\omega)=\dfrac{jc\omega}{k_1+k_2-m\omega^2+jc\omega}$.

1—12 $H(\omega)=\dfrac{1}{(k_1a^2+k_2b^2)-(J+m_1a^2+m_2b^2)\omega^2}$.

1—13 $H(\omega)=\dfrac{ak_2}{a^2k_2+b^2k_3-(J+mb^2)\omega^2}$.

1—14 $H(\omega)=\dfrac{k_2+jc\omega}{k_1k_2+jc\omega(k_1+k_2)}$.

1—15

$$H(\omega)=\frac{k_3(k_2+jc\omega)}{k_2(k_1+k_3)+j(k_1+k_2+k_3)c\omega-mk_2\omega^2-jcm\omega^3}.$$

1—16

$$H(\omega)=\frac{jc_2\omega(k_1+jc_1\omega)}{k_1k_2+j\omega(c_1k_1+c_1k_2+c_2k_2)-\omega^2(mk_2+c_1c_2)-jc_1m\omega^3}.$$

1—17 $H(\omega)=\dfrac{1}{1+jk\omega}$.

1—18 $H(\omega)=\dfrac{1}{b+ja\omega}$.

1—19 $H(\omega)=\dfrac{aK}{a^2K-ml(g+l\omega^2)}$,

$$\varphi(t)=\frac{aKe}{a^2K-ml(g+l\omega^2)}\cos\omega t.$$

1—20 $H(\omega)=\dfrac{k_2l}{k_t+(k_1+k_2)l^2-J_0\omega^2}$.

1—21 $\Delta=0.0053\ cm$.

1—22 $H(\omega)=\dfrac{kb+ma\omega^2}{kb^2-ma^2\omega^2}$,

$$\theta(t)=\frac{kb+ma\omega^2}{kb^2-ma^2\omega^2}a\sin\omega t,$$

$$x(t)=\frac{kb(b-a)-2ma^2\omega^2}{kb^2-ma^2\omega^2}a\sin\omega t.$$

1-23 $\theta(t) = \frac{\omega^2}{g - l\omega^2} a \sin \omega t,$

1-24 $A = 6.6$ cm.

1-25 $x(t) = \frac{a b k_2}{a^2 k_2 + b^2 k_1 - (J_0 + m b^2)\omega^2} a \sin \omega t.$

1-26 $x(t) = \frac{k_1 r_1 R a \sin \omega_1 t}{(k_1 R^2 + k_2 r_1^2) - \left(m r_1^2 + 3 J_2 \frac{r_1^2}{r_2^2} + J_1\right)\omega^2}$

1-27 $f(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \cos(2k-1)\omega t.$

1-28 $F(t) = F_0 \frac{T_0}{T}$

$$+ \frac{F_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\sin 2\pi n \frac{T_0}{T} \cos 2\pi n \frac{t}{T} \right.$$

$$\left. + \left(1 - \cos 2\pi n \frac{T_0}{T}\right) \sin 2\pi n \frac{t}{T} \right].$$

1-29 $F(t) = \frac{[illegible]}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\omega t.$

1-30 $F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16A}{\pi^2 (2n-1)^2} \sin(2n-$

$-1)\frac{\pi}{4} \sin(2n-1)\omega t.$

1—31 $F(t)=\dfrac{1}{\pi}+\dfrac{1}{2}\sin t$

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{n=2,4,6\cdots}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n-1)}\cos nt.$$

1—32 $F(t)=\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2nt}{(2n+1)(2n-1)}.$

1—33 $x(t)=\dfrac{8F_0}{k\pi^2\left(1-\dfrac{\omega^2}{p^2}\right)}\sin\omega t.$

1—34 $x(t)$

$$=\frac{4a}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)[2k-3m(2k-1)^2\omega^2]}\sin(2k-1)\omega t.$$

1—35 $\theta(t)$

$$=\frac{4a}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\omega t}{l(2n-1)[4k-7m(2n-1)^2\omega^2+jc\omega(2n-1)]}.$$

1—36 $x(t)=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\pi}\times\right.$

$$\left.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{[1-(0.11n\pi)^2]^2+(0.05n\pi)^2}}\sin(2\pi nt-\varphi_n)\right],$$

$$\varphi_n=\mathrm{tg}^{-1}\frac{0.05n\pi}{1-(0.11n\pi)^2}.$$

1—38 $F(t)=\dfrac{\sin(\omega-\omega_0)T}{\omega-\omega_0}+\dfrac{\sin(\omega+\omega_0)T}{\omega+\omega_0}.$

1—39 $x(t)=\frac{F_0}{16k}[1-\cos p(t-T)]$, $-T<t<T$.

$x(t)=\frac{F_0}{16k}[\cos p(t-T)+\cos p(t+T)]$,

$x(t)=0$, $\quad t<-T$.

1—40 $x(t)=\frac{F_1}{16k}[1-\cos pt]$, $\quad 0<t<t_1$

$x(t)=\frac{F_1}{k}[\cos p(t-t_1)-\cos pt]$

$+\frac{F_2}{k}[1-\cos p(t-t_1)]$, $t_1\leqslant t\leqslant t_2$,

$x(t)=\frac{F_1}{k}[\cos p(t-t_1)-\cos pt]$

$-\frac{F_2}{k}[\cos p(t-t_2)-\cos p(t-t_1)]$, $\quad t>t_2$.

第 二 章

2—1 $h(\tau)=\frac{k}{c}e^{-\frac{k}{c}\tau}$. 2—2 $h(\tau)=\frac{A}{c}e^{-\frac{k}{c}\tau}$.

2—3 $h(\tau)=\frac{k}{c}e^{-\frac{k}{c}\tau}$. 2—4 $h(\tau)=\frac{1}{c}e^{-\frac{k}{c}\tau}$.

2—5 $h(\tau)=\frac{1}{RC}e^{-\frac{\tau}{RC}}$.

2—6 $h(\tau)=\frac{k_2}{k_2c-k_1}e^{-\frac{k_1k_2}{k_2c-k_1}\tau}$

$$+\frac{ck_1k_1}{(-k_1+k_2c)^2}e^{-\frac{k_1k_2}{k_2c-k_1}\tau}.$$

2—7 $h(\tau)=\frac{1}{cl}e^{-\frac{4k}{c}\tau}$.

2—8 $h(\tau)=\frac{1}{2lmp}\sin pt,\quad p=\sqrt{\frac{K}{2m}}$.

2—9 $h(\tau)=\frac{1}{3lmp}\sin pt,\quad p=\sqrt{\frac{K}{12m}}$.

2—10 $h(\tau)=\frac{3}{lmp}\sin pt,\quad p=\sqrt{\frac{3K}{2m}}$.

2—11 $h(\tau)=\frac{K_2l_2}{(m_1l_1^2+m_2l_2^2)p}\sin p\tau,$

$$p=\sqrt{\frac{K_1l_1^2+K_2l_2^2}{m_1l_1^2+m_2l_2^2}}.$$

2—12 $h(\tau)=\frac{1}{J_0p'}e^{-\xi p\tau}\sin p'\tau,$

$$p'=p\sqrt{1-\xi^2},\quad p=\sqrt{\frac{2Kl}{J_0}},\quad \xi=\frac{cl}{\sqrt{2KJ_0}}.$$

2—13 $h(\tau)=\frac{1}{mp'}e^{-\xi p\tau}\sin p'\tau;\quad p'=p\sqrt{1-\xi^2},$

$$p=\sqrt{\frac{c}{m}},\quad \xi=\frac{c}{2\sqrt{mk}},\quad k=\frac{3EJ}{l^3}.$$

2—14 $h(\tau)=\frac{g}{Gp'}e^{-\xi p\tau}\sin p'\tau,$

$$p'=p\sqrt{1-\xi^2},\quad p=\sqrt{\frac{gK}{G}},\quad \xi=\frac{c}{2\sqrt{GK/g}}.$$

2-15 $h(\tau)=e^{-\xi p\tau}\left\{\dfrac{p}{\sqrt{1-\xi^2}}(1+2\xi^2)\sin p'\tau\right.$

$$\left.-2\xi p\cos p'\tau\right\},$$

$$p'=p\sqrt{1-\xi^2},\quad p=\sqrt{\frac{K}{m}},\quad \xi=\frac{c}{2\sqrt{mk}}.$$

2—16 $a(\tau)=e^{-(c/2m)\tau}\left[\dfrac{c}{m}\cos p'\tau+\dfrac{\frac{k}{m}-\frac{c^2}{2m^2}}{p'}\sin p'\tau\right]$

其中 $p'=\sqrt{\dfrac{k}{m}-\dfrac{c^2}{4m^2}}$.

2—17 $H(\omega)=\dfrac{-m}{k-m\omega^2+jc\omega}$,

$$h(\tau)=-\frac{1}{p'}e^{-\xi p\tau}\sin p'\tau,$$

$$p'=p\sqrt{1-\xi^2},\quad p=\sqrt{\frac{k}{m}},\quad \xi=\frac{1}{2\sqrt{mk}},$$

2—18 $y(t)=a\left[1-e^{-\frac{k}{c}t}\right],\quad 0<t<T,$

$$y(t)=a\left[e^{-\frac{k}{c}(t-T)}-e^{-\frac{k}{c}t}\right],\quad t>T$$

2—19 $x(t)=V_0t+a\left[\dfrac{t^2}{2}-\dfrac{1}{p^2}(1-\cos pt)\right].$

2—20 $x(t)=\dfrac{F_0}{k}(1-\cos pt).$

2—21 $x(t)=\dfrac{F_0}{k}\left[1-\cos\sqrt{\dfrac{k}{m}}(t+T)\right],\quad -T<t<T;$

$$x(t)=\frac{2F_0}{k}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot T\right)\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t\right),$$

$$t>T$$

2-22 $x(t)=\frac{F_1}{k}(1-\cos pt)$, $0<t<t_1$;

$$x(t)=\frac{F_1}{k}[\cos p(t-t_1)-\cos pt]$$

$$+\frac{F_2}{k}[\cos p(t-t_2)-\cos p(t-t_1)],$$

$$t_1<t<t_2;$$

$$x(t)=\frac{F_1}{k}[\cos p(t-t_1)-\cos pt]$$

$$+\frac{F_2}{k}[\cos p(t-t_2)-\cos p(t-t_1)],\quad t>t_2$$

$$p=\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

2-23 $x(t)=\frac{4a}{k}\left(t-\frac{1}{p}\sin pt\right)$, $p=\sqrt{\frac{k}{m}}$.

2-24 $x(t)=\frac{aF}{mp}\sin pt$.

2-25 (a) $x(t)=\frac{F_0}{k}\left[\frac{t}{t_1}-\frac{\sin pt}{pt_1}\right]$, $0<t<t_1$;

$$x(t)=\frac{F_0}{k}\left[\frac{\sin p(t-t_1)-\sin pt}{pt_1}\right.$$

$$\left.+\cos p(t-t_1)\right],\quad t>t_1$$

(b) $x(t)=\dfrac{F_0}{k}\Big[1-\cos pt-\dfrac{t}{t_1}+(\sin pt/pt_1)\Big],\quad 0\leqslant t\leqslant t_1;$

$$x(t)=\frac{F_0}{k}\left[-\cos pt+\frac{\sin pt-\sin p(t-t_1)}{pt_1}\right],\quad t\geqslant t_1.$$

(c) $x(t)=\dfrac{F_0}{k}[1-\cos pt],\quad 0\leqslant t<t_1;$

$$x(t)=\frac{F_0}{k}\left[1-\cos pt-\frac{t-t_1}{t_2-t_1}+\frac{\sin p(t-t_1)}{p}\right],\quad t_1\leqslant t<t_2;$$

$$x(t)=\frac{F_0}{k}\left[-\cos pt+\frac{\sin p(t-t_1)-\sin p(t-t_2)}{p(t_2-t_1)}\right],\quad t\geqslant t_2.$$

(d) $x(t)=\dfrac{F_0}{k}\left[\dfrac{t}{t_1}-\dfrac{1}{pt_1}\sin pt\right],\quad 0\leqslant t<t_1;$

$$x(t)=\frac{F_0}{k}\left[\frac{t}{t_1}-\frac{\sin pt}{pt_1}-\frac{t(t-t_1)}{t_2(t_2-t_1)}+\frac{t_2\sin p(t-t_1)}{pt_1(t_2-t_1)}\right],\quad t_1<t<t_2;$$

$$x(t)=\frac{F_0}{k}\left[-\frac{\sin pt}{pt_1}+\frac{t_2\sin p(t-t_1)}{pt_1(t_2-t_1)}-\frac{\sin p(t_2-t_1)}{p(t_2-t)}\right],\quad t\geqslant t_2.$$

2—26 $x(t)$ $\frac{F_0 \; k}{2\pi m(1-r^2)}$ ($t\cos$ t

$\frac{2r^2}{1-r^2}\sin \omega t$ $\frac{1+r^2}{1-r^2}$ $r\sin pt$),

其中 r p。

2—27 $x(t)$ $b(1-\cos pt)$.

2—28 $x(t)=F_0 t$ $(t-\frac{1}{p}\sin pt)$.

2—29 $x(t)$ $\frac{}{t}\sin pt$).

2—30 $x(t)$ $\frac{}{p^2}$ $\sin \omega t$ $\frac{}{p}\sin pt$) $\frac{1}{1-\omega^2/p^2}$].

2—31 $\theta(t)$ $\frac{F}{(1+ \;\; ^2 t^2)}$ $pt_0\sin pt$

$\cos pt$ e t_0 .

2—32 (a) $x(t)=\frac{a}{p^2}\left[\frac{t}{t_1}-\frac{\sin pt}{pt_1}\right]$, $0\leqslant t<t_1$

$x(t)=\frac{a}{p^2}\left[1+\frac{\sin p(t-t_1)-\sin pt}{pt_1}\right]$,

$t\geqslant t_1$.

(b) $x(t)$ $\frac{t}{t_1}$ $\frac{\sin pt}{pt_1}$, $0\leqslant t$ t_1

$x(t)$ b $\frac{\sin p(t-t_1)-\sin pt}{pt_1}$

$\cos p(t-t_1)$], $t\geqslant t_1$.

(c) $x(t) = \frac{a_1 + a_2}{p^2}\left(\frac{t}{t_1} - \frac{\sin pt}{pt_1}\right)$

$- \frac{a_1}{p^2}(1 - \cos pt), \quad 0 \le t \le t_1;$

$x(t) = \frac{a_1}{p^2}\cos pt - \frac{a_2}{p^2}\cos p(t - t_1) +$

$+ \frac{a_1 + a_2}{p^2}\left[\frac{\sin p(t - t_1) - \sin pt}{pt_1}\right],$

$t > t_1$.

(d) $x(t) = b_1(1 - \cos pt) - (b_1 + b_2)\left(\frac{t}{t_1}\right.$

$\left. - \frac{\sin pt}{pt_1}\right), \quad 0 \le t \le t_1;$

$x(t) = -b_1\cos pt - b_2\cos p(t - t_1)$

$- \frac{b_1 + b_2}{pt_1}[\sin p(t - t_1) - \sin pt]$。

2—33 $x(t) = \frac{1}{p'} e^{-nt}\sin p't$。

2—34 $\theta(t) = \frac{a}{p^2}\left[1 - \frac{e^{-nt}}{p'}(n\sin p't + p'\cos p't)\right]$,

$0 \le t \le T;$

$\theta(t) = \frac{a}{p^2 p'}\{e^{-n(t-T)}[n\sin p'(t - T)$

$+ p'\cos p'(t - T)] - e^{-nt}[n\sin p't$

$+ p'\cos p't]\}, \quad t > T;$

$p' = \sqrt{p^2 - n^2}, \quad n = \frac{8c}{41m}, \quad p^2 = \frac{16k}{41m}$

2—35 $x(t)=V_0(t-\frac{1}{p}\sin pt)$, $0<t<t_1$;

$$x(t)=V_0\{t_1\cos p(t-t_1)+\frac{1}{p}[\sin p(t-t_1)-\sin pt]\},\quad t>t_1.$$

2—36 $$x(t)=\frac{ak_1}{mp^2}(1-\cos pt)+\frac{ak_1}{m(\omega^2-p^2)}[\cos\omega t-\cos pt],$$

$$0<t<\frac{2\pi}{\omega};$$

$$x(t)=\left[\frac{ak_1}{m(p^2-\omega^2)}-\frac{ak_1}{mp^2}\right]\left\{\cos pt-\cos p\left(t-\frac{2\pi}{\omega}\right)\right\},\quad t>t_1.$$

第 三 章

3—1(a) $$X(s)[Ms^2+Cs+K]=M[sx(0^+)+\dot{x}(0^+)]+Cx(0^+)+\frac{3}{s^2};$$

(b) $$\Theta(s)[Js^2+Cs+K]=J[s\theta(0^+)+\dot{\theta}(0^+)]+C\theta(0^-)=\frac{10\omega}{s^2+\omega^2}.$$

3—2(a) $f(t)=1-e^{-t}$; (b) $f(t)=2e^{-t}-e^{-2t}$;

(c) $f(t)=t-1+e^{-t}$;

(d) $f(t)=\frac{1}{9}\left(\sin\frac{2}{3}t+\cos\frac{2}{3}t\right)e^{-\frac{t}{3}}$.

3—3 $F(s)=\frac{1}{s}(3-2e^{-2s}+e^{-4s})$.

3—4 $F(s)=\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1-e^{-bs}}{1+e^{-bs}}=\frac{1}{s^2}th\frac{bs}{2}$.

3—5 $F(s)=\frac{a}{s}th(Ts/4)$.

3—6 $F(s)=\frac{2a}{Ts}\left[\frac{T}{2}cth\frac{Ts}{2}-\frac{1}{s}\right]$

3—7(a) $y(t)=\frac{1}{8}(3e^{t}-2e^{-t}-e^{-3t})$;

(b) $y(t)=te^{t}\sin t$

3—8 $G(s)=\frac{1}{(m_1+m_2+m_3)s^2+k}$.

3—9 $G(s)=\frac{(k_1+k_2)(k_3+k_4)k_1k_2}{ms^2[(k_1+k_2)(k_3+k_4)+k_1k_2]+(k_1k_2+k_2k_3+k_3k_1)k_4}$.

3-10 $G(s)=\frac{kL_2L_1}{(ms^2+AY)L_2^2+kL_1^2}$.

3-11 $G(s)=\frac{2k_2/k_1}{(m_1+m_2)s^2+2(k_1+k_2)}$.

3-12 $G(s)=\frac{ck}{mcs^2+mks+ck}$.

3-13 $G(s)=\frac{-m}{ms^2+cs+k}$.

3-14 $$G(s)=\frac{c_1c_2s^2+(k_2c_1+k_1c_2)s+k_1k_2}{c_1c_2s^2+(k_1c_2+k_2c_1+k_2c_2)s+k_1k_2}.$$

3-15 $$G(s)=\frac{c_1s+k_1}{(c_1+c_2)s+k_1+k_2}.$$

3-16 $$G(s)=\frac{ck_2s}{cMs^3+k_2Ms^2+c(k_1+k_2)s+k_1k_2}.$$

3-17 $$G(s)=\frac{k_1+k_2}{cms^3+m(k_1+k_2+k)s^2+(cs+k)(k_1+k_2)}.$$

3-18 $$G(s)=\frac{(k_3cs+k_1+k_2)}{cms^3+(k_1+k_2)ms^2+(k_3+k_2)s+(k_1k_2+k_2k_3+k_3k_1)}.$$

3-19 $$G(s)=\frac{k_1(cs+k_2)}{cms^3+m(k_1+k_2)s^2+ck_1s+k_1k_2}.$$

3-20 $$y(t)=\frac{AK}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}\sin(\omega t-\mathrm{arctg}\,\omega T).$$

3-21 $$G(s)=\frac{a^2k_2+L^2k_1}{ms^2(a^2k_2+L^2k_1)+a^2k_1k_2},$$

$$x(t)=\frac{A/m}{p^2-\omega^2}\left(\sin\omega t-\frac{\omega}{p}\sin pt\right),$$

$$p^2=\frac{a^2k_1k_2}{m(a^2k_2+L^2k_1)}.$$

3-22 $$G(s)=\frac{4(k_1+k_2)}{4ms^2(k_1+k_2)+k_1k_2},$$

$$x(t)=\frac{1-\cos pt}{mp^2},$$

$$p^2=\frac{k_1k_2}{4m(k_1+k_2)}.$$

$$\frac{F_0}{kl - mg}\left(1-\cos\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{g}{l}}\,t\right),$$

$$0<t<T;$$

3-23 (t)

$$\frac{F_0}{kl-mg}\sin\left(\frac{T}{2}\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{g}{l}}\right)\sin$$

$$\left[\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{g}{l}}\left(t-\frac{T}{2}\right)\right],\quad t\geqslant T.$$

$$\frac{al_1}{kl_2^2}\left\{1-e^{-\frac{c}{2m}t}\left[\cos\omega t+\right.\right.$$

3-24

$$\left.\left.+\frac{c}{2m\omega}\sin\omega t\right]\right\}$$

$y(t)=l_1\varphi(t)$

3-25 $\varphi(t)=\dfrac{1}{10a(m\omega^2-k)}\left(\sqrt{\dfrac{m}{k}}\sin\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t\right.$

$$\left.-\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right).$$

3-26 $x(t)=\dfrac{l_2F_0}{l_1K}\left[1-\dfrac{A}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi pt}\cdot\right.$

$$\left.\cdot\sin(p't+\varphi)\right];$$

$$\varphi=\mathrm{tg}^{-1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}.$$

3-27 $x(t)=\dfrac{ak_3}{m(p^2-\omega^2)}\left[\sin\omega t-\dfrac{\omega}{p}\sin pt\right],$

$$p=\sqrt{\frac{k_1+k_2+k_3}{m}}.$$

3-28 $x(t)=\dfrac{1}{mp'}e^{-\xi pt}\sin p't$,

$$p'=p\sqrt{1-\xi^2},\qquad p=\sqrt{\frac{k}{m}},$$

$$\xi=\frac{c}{2\sqrt{mk}}.$$

3-29 $x(t)=4\sin 7t$.

3-30 $G(s)=\dfrac{k}{ms^2+cs+k_1+k_2}$.

$$x(t)=\frac{kA_0\sin(\omega t-\varphi)}{\sqrt{(k+k_1-m\omega^2)^2+c^2\omega^2}},$$

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{c\omega}{k+k_1-m\omega^2}.$$

3-31 $x(t)=\dfrac{\sin\omega t}{1-(\omega/p)^2},\qquad \omega=\dfrac{2\pi}{L}v$.

3-32 $$x(t)=\frac{al_1k_1}{(m_1l_1^2+m_2l_2^2)(p^2-\omega^2)}\cdot\left[\sin\omega t-\frac{\omega}{p}\sin pt\right].$$

3-33 $$x(t)=0.0049+e^{-20t}(0.248\sin 40t-0.0049\cos 40t).$$

3-34 $x(t)=vt-\dfrac{v}{p}\sin pt$.

3-35 $$x(t)=\frac{F_0}{k}\cdot\frac{e^{\frac{k}{c}T}-1}{e^{-\frac{k}{c}T}-1}\left[e^{-\frac{k}{c}T}-1\right]e^{-\frac{k}{c}t}.$$

第 四 章

4-1 $\begin{bmatrix} (2k \quad m\omega^2)^{-1} & 0 \\ 0 & (6k \quad m\omega^2)^{-1} \end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{mp_1}\sin p_1 t & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{mp_2}\sin p_2 t \end{bmatrix}$,

$p_1^2 \quad \dfrac{2k}{m}$, $p_2^2 = \dfrac{6k}{m}$;

4—2 $H_x(\omega) = \dfrac{1}{\varDelta}(6k_1 \quad 3m\omega^2)$,

$H_\theta(\omega) \quad \dfrac{1}{\varDelta \cdot l}(k_2 - 3m\omega^2 - 6k_1)$,

$\varDelta \quad 8k_1k_2 - 3m(9k_1 + k_2)\omega^2 + 9m^2\omega^4$.

4—3 $x(t) = \dfrac{ak_1}{\varDelta}[k_2 - M(\rho^2 + L^2)\omega^2]\sin\omega t$,

$\theta(t) \quad \dfrac{aMk_1L\omega^2}{\varDelta}\sin\omega t$,

$\varDelta - M^2\rho^2\omega^4 \quad M[k_1(\rho^2 + L^2) + k_2]\omega^2 + k_1k_2$.

4—4 $H_1(\omega) \quad \dfrac{-k}{\varDelta}$, $H_2(\omega) \quad \dfrac{2m\omega^2 - 3k}{\varDelta}$.

$\varDelta \quad (2k \quad m\omega^2)(k \quad 2m\omega^2)$,

$h_1(t) - \dfrac{1}{3\sqrt{2km}}\Big[\sin\sqrt{\dfrac{2k}{m}}\,t$

$$2\sin\sqrt{\frac{k}{2m}}\,t\ ;$$

$$h_2(t) = \frac{1}{2km}\left(\sin\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t + 4\sin\sqrt{\frac{k}{2m}}\,t\right).$$

4-5 $x_1(t) = \frac{k}{\Delta}me\omega^2\sin\omega t,$

$$x_2(t) = \frac{2m\omega^2 - 3k}{\Delta}me\omega^2\sin\omega t,$$

$$\Delta = (2k - m\omega^2)(k - 2m\omega^2).$$

4-6 $x_1(t) = \frac{1}{m_1+m_2}\left\{\frac{m_2}{m_1\sqrt{p_1^2+p_2^2}}\sin\sqrt{p_1^2+p_2^2}\,t + t\right\}.$

$$x_2(t) = \frac{1}{m_1+m_2}\left\{t - \frac{1}{\sqrt{p_1^2+p_2^2}}\sin\sqrt{p_1^2+p_2^2}\,t\right\};$$

$$p_1^2 = \frac{k}{m_1};\qquad p_2^2 = \frac{k}{m_2}.$$

4-7 $H_1(\omega) = \frac{k_1 + jc_1\omega}{k_1 + k_2 + j(c_1 + c_2)\omega},$

$$H_2(\omega) = \frac{k_2 + jc_2\omega}{k_1 + k_2 + j(c_1 + c_2)\omega}.$$

4-8 $$H(\omega)=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}2k-m\omega^2 & k\\ k & 2k-m\omega^2+jc\omega\end{bmatrix},$$

$$\Delta=(3k-m\omega^2)(k-m\omega^2)+(2k-m\omega^2)jc\omega.$$

$$G(s)=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}ms^2+2k & k\\ k & ms^2+cs+2k\end{bmatrix},$$

$$\Delta=(3k+ms^2)(k+ms^2)+cs(2k+ms^2).$$

4-9 $$H(\omega)=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}k-m\omega^2+jc\omega & k+jc\omega\\ k+jc\omega & 2k+j2c\omega-m\omega^2\end{bmatrix},$$

$$\Delta=(k+jc\omega)^2-3(k+jc\omega)m\omega^2+m^2\omega^4.$$

4-10 $$H_{11}(\omega)=\frac{9.8-\omega^2}{20(\omega^2-5.59)(\omega^2-8.8)},$$

$$H_{21}(\omega)=\frac{\omega^2}{20(\omega^2-8.8)(\omega^2-5.59)}.$$

4-11 $$H(\omega)=\frac{1}{(4k-m\omega^2)(2k-2m\omega^2)}\begin{bmatrix}3k-m\omega^2 & 2k\\ 2k & 4k-2m\omega^2\end{bmatrix},$$

$$h(\tau)=\frac{2\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\tau}{6\sqrt{mk}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}+\frac{\sin\sqrt{\frac{2k}{m}}\tau}{6\sqrt{mk}}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}.$$

4-12 $$H(\omega)=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}k_2+\frac{m_2}{l_2}g-m_2\omega^2 & \\ & \frac{m_2}{l_2}g\end{bmatrix}$$

$$\frac{m_2}{l_2} g$$

$$k_1 + \frac{m}{l_1} g + m_2 g \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) - m_1\omega^2$$

$$\Delta = \left[k_1 + \frac{m_1}{l_1} g + m_2 g \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) - m\omega^2\right]\left[k_2 + \frac{m_2}{l_2} g - m_2\omega^2\right] - \left(\frac{m_2 g}{l_2}\right)^2.$$

4-13 $\quad H_x(\omega) = \frac{1}{\Delta}(k_1 + k_2 - m\omega^2)$,

$$H_\theta(\omega) = \frac{1}{\Delta}\left(k_2 - \frac{1}{2} m\omega^2\right),$$

$$\Delta = \left[k_2 - (M + m)\omega^2\right]\left[k_1 + k_2 - m\omega^2\right] - \left[k_2 - \frac{1}{2} m\omega^2\right]^2.$$

4-15 $\quad \frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n|z_n|} \sin(n\pi t - \varphi_n)$,

$$|z_n| = \frac{n}{(1 + n^2)^2}\sqrt{(4 - 13n^2 + n^4)^2 + 4n^2},$$

$$\varphi_n = \mathrm{tg}^{-1}(4 - 13n^2 + n^4)/2n^3.$$

4-16 $\quad H(\omega) = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} k_2 - m_2\omega^2 + jc\omega & jc\omega \\ jc\omega & k_1 - m_1\omega^2 + jc\omega \end{bmatrix}$,

$$\Delta = (k_1 - m_1\omega^2 + jc\omega)(k_2 - m_2\omega^2 + jcm) - c^2\omega^2.$$

$$G(s) = \frac{1}{\Delta'}\begin{bmatrix} m_2 s^2 + cs + k_2 & -cs \\ cs & m_1 s^2 + cs + k_1 \end{bmatrix},$$

$$\Delta' = (m_1 s^2 + cs + k_1)(m_2 s^2 + cs + k_2) - c^2 s^2.$$

4-17 $$G(s) = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} c_1 s + c_2 s + m_2 s^2 & c_1 s \\ c_1 s & m_1 s^2 + c_1 s + k \end{bmatrix},$$

$$\Delta = (m_1 s^2 + c_1 s + k)(c_1 s + c_2 s + m_2 s^2) - c_1^2 s^2.$$

$$H(\omega) = \frac{1}{\Delta'}\begin{bmatrix} j(c_1 + c_2)\omega - m_2\omega^2 & jc_1\omega \\ jc_1\omega & k - m_1\omega^2 + jc_1\omega \end{bmatrix},$$

$$\Delta' = (k - m_1\omega^2 + jc_1\omega)[j(c_1 + c_2)\omega - m_2\omega^2] + c_1^2\omega^2$$

4-18 $$x_1(t) = \frac{1}{\Delta}[ma\omega^2(3k - 2m\omega^2)]a\sin\omega t,$$

$$x_2(t) = \frac{1}{\Delta}[ma\omega^2(5k - 2m\omega^2)]a\sin\omega t,$$

$$\Delta' = (2k - m\omega^2)(k - 2m\omega^2).$$

4-19 $$G(s) = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} k_1[(c_1 + c_2)s + k_1 + k_2] \\ (m_1 s^2 + k_1)[(c_1 + c_2)s + k_1 + k_2] \end{bmatrix},$$

其中 $$\Delta = (m_1 s^2 + k_1)[m_2 s^2 + (c_1 + c_2)s + k_1 + k_2 + k_3] - k_1^2.$$

4-20 $$H_1(\omega) = \frac{k}{\Delta},\quad H_2(\omega) = \frac{3k - 2m\omega^2}{\Delta},$$

其中 $$\Delta = (2k - m\omega^2)(k - 2m\omega^2),$$

$$h_1(t) = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{mk}}\left[\sin\sqrt{\frac{k}{2m}}\,t - \frac{1}{2}\sin\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t\right],$$

$$h_2(\tau)=\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{mk}}\left\{2\sin\sqrt{\frac{k}{2m}}\,t+\frac{1}{2}\sin\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t\right\}。$$

4-21 $$H(\omega)=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}k\\3k-2J\omega^2\end{bmatrix}$$

其中 $\Delta=(2k-J\omega^2)(k-2J\omega^2)$；

$$h(\tau)=\frac{1}{3\sqrt{2Jk}}\begin{bmatrix}2\sin\sqrt{\frac{k}{2J}}\,\tau-\sin\sqrt{\frac{2k}{J}}\,\tau\\4\sin\sqrt{\frac{k}{2J}}\,\tau+\sin\sqrt{\frac{2k}{J}}\,\tau\end{bmatrix}。$$

4-22 $$H(\omega)=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}k^2-3km\omega^2+m^2\omega^4, & k^2-mk\omega^2, & k^2\\k^2-km\omega^2, & 2k^2-3km\omega^2+m^2\omega^4, & 2k^2-mk\omega^2\\k^2, & 2k^2-mk\omega^2, & 3k^2-6km\omega^2+m^2\omega^4\end{bmatrix}。$$

$$\Delta=k^3-6k^2m\omega^2+5km^2\omega^4-m^3\omega^6。$$

4-23 $$H(\omega)=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}k(k-m\omega^2)\\k^2-2km\omega^2+m^2\omega^4\\k(k-m\omega^2)\end{bmatrix},$$

其中 $\Delta=m^2(m\omega^2-3k)(k-m\omega^2)\omega^2$。

$$\frac{1}{2\sqrt{km}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{\frac{k}{k}}\tau + \sin\sqrt{\frac{3k}{m}}\tau\right)$$

$$h(\tau)=\frac{1}{\sqrt{3km}}\sin\sqrt{\frac{3k}{m}}\tau$$

$$\frac{1}{2\sqrt{km}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\tau + \sin\sqrt{\frac{3k}{m}}\tau\right)$$

4-2[illegible] $$x(t)=\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{Bmatrix} = \frac{F_0\sin\omega t}{m^2(p_1^2-\omega^2)(p_2^2-\omega^2)(p_3^2-\omega^2)}\begin{Bmatrix} k^2 \\ k(2k-m\omega^2) \\ 3k^2-4km\omega^2+m^2\omega^4 \end{Bmatrix}$$

其中 $p_1^2=0.198p_0^2$，$p_2^2=1.555p_0^2$，$p_3^2=3.247p_0^2$ 是系统的三固有频率，$p_0^2=\frac{k}{m}$。

4-2[illegible] $$H(\omega)=\frac{1}{\Delta}\begin{Bmatrix} (2k-2m\omega^2+jc\omega)(2k-m\omega^2+jc\omega)-(k+jc\omega)^2 \\ k^2(2k-m\omega^2+jc\omega) \\ k(k+jc\omega) \end{Bmatrix}$$

其中 $\Delta = (k - m\omega^2)[2(k - m\omega^2) + jc\omega](2k - m\omega^2 + jc\omega) - k^2(2k - m\omega^2 + jc\omega) - (k + jc\omega)^2(k - m\omega^2)$。

$$G(s) = \frac{1}{\Delta'}\begin{Bmatrix} (2ms^2 + cs + 2k)(ms^2 + cs + k) - (cs + k)^2 \\ -k^2(ms^2 + cs + k) \\ k(cs + k) \end{Bmatrix}$$

其中 $\Delta' = (ms^2 + k)(2ms^2 + cs + 2k)(ms^2 + cs + k) - k^2(ms^2 + cs + k) - (cs + k)^2(ms + k)$。

4-26 $$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \frac{F_0}{k}\begin{Bmatrix} 1 - 0.724\cos p_1 t - 0.276\cos p_2 t \\ 1 - 1.171\cos p_1 t + 0.171\cos p_2 t \end{Bmatrix},$$

$p_1^2 = 0.382\dfrac{k}{m}$，$p_2^2 = 2.618\dfrac{k}{m}$。

4—30 $$H(\omega) = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} 2k \\ 9k - 2m\omega^2 \end{bmatrix};$$

其中 $\Delta = (5k - m\omega^2)(k - 2m\omega^2)$。

$$h(\tau) = \frac{2}{9\sqrt{mk}} \times \begin{bmatrix} \sqrt{2}\sin\sqrt{\dfrac{k}{2m}}\,\tau - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\sin\sqrt{\dfrac{5k}{m}}\,\tau \\ 4\sqrt{2}\sin\sqrt{\dfrac{k}{2m}}\,\tau - \dfrac{1}{2\sqrt{5}}\sin\sqrt{\dfrac{5k}{m}}\,\tau \end{bmatrix}.$$

4－31　$H(\omega)=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}4k-m\omega^2\\2k\end{bmatrix}$；

其中　$\Delta=\frac{1}{2}r^2(2k-m\omega^2)(6k-m\omega^2)$。

$$h(\tau)=\frac{1}{r^2\sqrt{2km}}\times\begin{bmatrix}\sin\sqrt{\frac{2k}{m}}\tau+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{\frac{6k}{m}}\tau\\ \sin\sqrt{\frac{2k}{m}}\tau-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{\frac{6k}{m}}\tau\end{bmatrix}.$$

4－32　$H(\omega)=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}10k-3m\omega^2\\4k\end{bmatrix}$；

其中　$\Delta=\frac{r}{2}(4k-m\omega^2)(6k-9m\omega^2)$。

$$h(\tau)=\frac{1}{15r\sqrt{mk}}\times\begin{bmatrix}4\sqrt{6}\sin\sqrt{\frac{2k}{3m}}\tau+\sin\sqrt{\frac{4k}{m}}\tau\\ 2\sqrt{6}\sin\sqrt{\frac{2k}{3m}}\tau-2\sin\sqrt{\frac{4k}{m}}\tau\end{bmatrix}.$$

4－33　$H(\omega)=\frac{1}{2(k-m\omega^2)(k-2m\omega^2)}\begin{bmatrix}3k-4m\omega^2 & k\\ k & -(3k-4m\omega^2)\end{bmatrix}$。

$$h(\tau) = \frac{1}{2mk}\begin{pmatrix} \sin\sqrt{\frac{k}{2m}}\tau + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\tau, & \sin\sqrt{\frac{k}{2m}}\tau - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\tau, \\ -\sin\sqrt{\frac{k}{2m}}\tau + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\tau & -\sin\sqrt{\frac{k}{2m}}\tau - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\tau \end{pmatrix}.$$

4-34 $H(\omega) = \dfrac{1}{2(2k - m\omega^2)(k - 2m\omega^2)}\begin{pmatrix} k \\ k - m\omega^2 \end{pmatrix}$

$$h(\tau) = \frac{1}{6\sqrt{mk}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}\sin\sqrt{\frac{k}{2m}}\tau - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{\frac{2k}{m}}\tau \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\sqrt{\frac{k}{2m}}\tau + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{\frac{2k}{m}}\tau \end{pmatrix}.$$

第 五 章

5-1 2，0.4.

5-2 $p_\eta(x) = \begin{cases} 1/3, & 1 < x < 4; \\ 0, & \text{其余}. \end{cases}$

5-3 $b = 2a$ $\quad p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{2x}, & x < 0; \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-2x}, & x \geq 0. \end{cases}$

5-4　1, 0.4, $p(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 0, & x<0,\ x>1.\end{cases}$

5-5　$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{\pi}$, $p(x)=\frac{1}{\pi(x^2+1)}$　$-\infty<x<\infty$.

5-6　$\frac{1}{\pi}$, $p(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant -1;\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin x & -1<x<1;\\ 1 & x\geqslant 1.\end{cases}$

5-7　$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{a}, & 0<x<a;\\ 0 & x\leqslant 0,\ x\geqslant a.\end{cases}$

$P(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0;\\ \frac{x}{a}, & 0<x<a;\\ 1, & x\geqslant a.\end{cases}$

5-8　$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{a}, & 0<x\leqslant a.\\ 0, & x\leqslant 0,\ x>a.\end{cases}$

5-9　$p_y(y)=\frac{1}{k}\,p_x\left(\frac{y-b}{k}\right)$.

5-10　$p(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}(A^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}, & 0\leqslant x<A;\\ 0, & x<0,\ x\geqslant A.\end{cases}$

5-11　$p(y)=\begin{cases}\frac{1}{4\sqrt{|y|}}, & -1\leqslant y\leqslant 1 \text{ 但 } y\neq 0;\\ 0, & y<-1,\ y>1.\end{cases}$

5-12　$p(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-y/2}, & y>0;\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$

5-13 $p(y) = \dfrac{2e^{y}}{\pi(e^{2y}+1)}, \qquad -\infty < y < \infty$

5-14 $\dfrac{\pi A}{3}$.

5-15 $p(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

5-16 0.0614.

5-17 $P(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{x}{A}\right), & 0 \leqslant x \leqslant A; \\ 1, & x > A. \end{cases}$

$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2A}, & 0 \leqslant x \leqslant A; \\ 0, & x < 0, \quad x > A. \end{cases}$

5-19 $p(xy) = \dfrac{1}{\pi\sigma^2\sqrt{3}} e^{-\frac{2}{3\sigma^2}[x^2 + y^2 - xy]}$,

$p(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$,

$p(y) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$,

$p(x/y) = \dfrac{\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{3\pi}} e^{-\frac{1}{6\sigma^2}(2x-y)^2}$

5-20 4; $\dfrac{3}{4}$; $\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{3}{4}$.

5-21 (1) $A = \dfrac{1}{\pi^2}$, $\quad B = C = \dfrac{\pi}{2}$;

(2) $p(x, y) = \dfrac{1}{\pi^2(x^2+4)(y^2+9)}$;

(3) $p_x(x) = \dfrac{2}{\pi(x^2+4)}$;

$p_y(y) = \dfrac{3}{\pi(y^2+9)}$.

5-22 $A = \dfrac{3}{\pi R^3}$, $p = \dfrac{3r^2}{R^2}\left(1 - \dfrac{2r}{3R}\right)$, $(r<R)$,

5-23 $p(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)(d-c)}, & a<x<b, \quad c<y<d; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

5-24 $c = \dfrac{1}{\pi^2}$; $\dfrac{1}{16}$

5-25 $\dfrac{1}{2}$.

5-26 $p(z) = \begin{cases} (e-1)e^{-z}, & z>1. \\ 1-e^{-z}, & 0<z\leqslant 1. \\ 0, & z\leqslant 0. \end{cases}$

5-27 $p(z) = \begin{cases} \dfrac{z^2}{2}, & 0\leqslant z\leqslant 1. \\ -z^2+3z-\dfrac{3}{2}, & 1\leqslant z\leqslant 2. \\ \dfrac{1}{2}z^2-3z+\dfrac{9}{2}, & 2\leqslant z\leqslant 3. \\ 0, & z<0,\ z>3. \end{cases}$

5-28 $A = \dfrac{1}{2}$, $p_x(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(\sin x+\cos x), & 0<x<\dfrac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

X与Y同分布。

5-29　$p = 1 - e^{-k^2/2}$。

5-30　$p(x,\ y) = \dfrac{1}{32\pi} e^{-\frac{35}{32}\left(\frac{x^2}{16} - \frac{3xy}{50} + \frac{y^2}{25}\right)}$。

5-31　$p(z) = \dfrac{1}{2b}\left\{\Phi\left(\dfrac{z+b-\mu_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\dfrac{z-b-\mu_x}{\sigma_x}\right)\right\}$，

$(-\infty < z < \infty)$

第　六　章

6-1　$\mu_x = \dfrac{2}{3}$，　$\sigma_x^2 = \dfrac{1}{18}$。

6-2　$c = \dfrac{1}{\pi}$，　$\mu_x = 0$，　$\sigma_x^2 = \dfrac{1}{2}$。

6-3　(1) $A = \dfrac{1}{\sigma^2}$，　(2) $e^{-\pi/4}$，$\left(E(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,\sigma\right)$。

(3) $\left(2 - \dfrac{\pi}{2}\right)\sigma^2$。

6-4　$E[x] = \dfrac{a}{2}$，　$E[x^2] = \dfrac{a^2}{3}$，　$\sigma^2 = \dfrac{a^2}{12}$。

6-5　$E[x] = \dfrac{1}{2}$，　$E[x^2] = \dfrac{1}{3}$，　$\sigma_x = \dfrac{1}{6}\sqrt{3}$。

6-6　$E[y] = 1$，　$E[y^2] = 3$，　$\sigma_y^2 = 2$，

6-7　$\mu_x = \dfrac{2A}{\pi}$，　$\psi_x^2 = \dfrac{A^2}{2}$，　$\sigma_x^2 = \dfrac{\pi^2 - 8}{2\pi^2} A^2$。

6-9 $E[x] = 0$, $\sigma_x^2 = 2$.

6-10 $A = \dfrac{4}{a^3\sqrt{\pi}}$, $E[x] = \dfrac{2a}{\sqrt{\pi}}$,

$\sigma_x^2 = \left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{4}{\pi}\right)a^2$.

6-11 $E[x] = \dfrac{1}{2}$, $\psi_x^2 = \dfrac{1}{3}$.

6-12 $E[x] = A_0$, $\psi_x^2 = A_0^2 + \dfrac{A_1^2}{2}$.

6-13 $\dfrac{A}{4}$, $\dfrac{A^2}{6}$, $\dfrac{5}{48}A^2$.

6-14 $\dfrac{A}{2}$, $\dfrac{A^2}{2}$, $\sqrt{\dfrac{A^2}{4}}$.

6-15 $E[z^2] = 2.66$, $\sigma_z = \sqrt{\sigma_z^2} = 0.62$

6-16 $C = \dfrac{1}{\pi^2}$.

6-17 $\dfrac{y}{2}$.

6-18 $\dfrac{1}{6}x^2$, $\dfrac{1}{6}x^2\sin^2(\omega t - \psi_0)(2 + \cos\psi_0)$.

6-19 -1, $\dfrac{19}{4}$.

6-20 1, $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$, $2 - \dfrac{\pi}{2}$.

6- 1 0, $\dfrac{\pi^2}{12}$ $\dfrac{1}{2}$.

6-22 $\quad 0,\quad \frac{1}{5}$.

6-23 $\quad A=\frac{1}{2},\quad \mu_x = \mu_y = 0.785,$

$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 0.187.$

6-24 $\quad A=\frac{1}{\pi},\quad \mu_x=\mu_y=0,\quad \sigma_x^2=\sigma_y^2=\infty.$

6-25 $\quad \mu_\eta=\sqrt{\frac{\pi}{2}},\quad \sigma_\eta^2 = 2-\frac{\pi}{2}.$

6-26 $\quad \frac{b^2}{(a+b)^2}\sigma_\theta^2,\quad \frac{a^2}{(a+b)^2}\sigma_\theta^2,$

$\left[\frac{a^2b^2}{3EJ(a+b)}\right]^2\sigma_\theta^2,\quad \frac{a^2b^2}{(a+b)^2W^2}\sigma_\theta^2.$

第　七　章

7—3 $\quad S(0)=\int_{-\infty}^{\infty}R_x(\tau)e^{-2\pi\cdot 0\cdot\tau}d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)d\tau=0.$

7—8 　提示：（1）　$R_x(\tau)=E[x(t)x(t+\tau)]$，对 τ 微分时应将 t 视为常数。

（2）　$H_{\dot{y}}(\omega)=j\omega H_y(\omega)$。

7—9 $\quad R_f(\tau)=A^2,\quad S_f(\omega)=2\pi A^2\delta(\omega).$

7—10 $\quad R_f(\tau)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}A_k\delta(\tau-kc),$

$S_f(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}A_k\cos kc\omega.$

7—12 $R_x(\tau) = \frac{A^2}{6}\left[1 - 3\frac{\tau}{T} + 4\left(\frac{\tau}{T}\right)^3\right],\ 0 < \tau < T.$

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{6}\left[1 - \frac{3}{T}(T-\tau) + \frac{4}{T^3}(T-\tau)^3\right],$$

$$\frac{T}{2} < \tau < T.$$

7—13 $\mu_x = \frac{A}{2},\quad \psi_x^2 = \frac{A^2}{2},\quad R_x(\tau) = A^2\left[\frac{1}{2} - \frac{\tau}{T}\right],$

$$0 < \tau < \frac{T}{2},$$

$$R_x(\tau) = A^2\left[-\frac{1}{2} + \frac{\tau}{T}\right],\quad \frac{T}{2} \leqslant \tau \leqslant T.$$

7—14
$$R_x(\tau) = \begin{cases} \frac{a^2}{3}\left[1 - 24\left(\frac{\tau}{T}\right)^2 + 32\left(\frac{\tau}{T}\right)^3\right], & 0 \leqslant \tau \leqslant \frac{T}{2}, \\ \frac{a^2}{3}\left[9 - 48\frac{\tau}{T} + 72\left(\frac{\tau}{T}\right)^2 - 32\left(\frac{\tau}{T}\right)^3\right], & \frac{T}{2} \leqslant \tau \leqslant T. \end{cases}$$

7—15 $R_x(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos\frac{2\pi}{T}t.$

$$\mu_x = 2A/\pi,\ \psi_x^2 = A^2/2,\ \sigma_x^2 = A^2\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\right).$$

7—16 $R_x(\tau) = \sum_{n=1,3,5,\cdots} \frac{8a^2}{\pi^2 n^2}\cos\frac{2\pi}{T}n\tau.$

7—17 $R_x(\tau) = \frac{\pi}{24}\left(9e^{-|\tau|} + 5e^{-3|\tau|}\right),\quad \psi_x^2 = \frac{7}{12}\pi.$

7—18 $R_x(\tau) = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\sin\omega_0\tau}{\omega_0\tau}\right)$;

$$S_x(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi a^2}{2\omega_0}, & 0<\omega<\omega_0; \\ 0, & \omega_0<\omega. \end{cases}$$

7—19 $S_x(\omega) = \frac{\pi}{2}\{\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\}$.

7—20 $\mu_x = 0$, $\psi_x^2 = A$, $S_x(\omega) = \frac{2Aa}{a^2+\omega^2}$.

7—21 $S_x(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a^2}}\, e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}$.

7—22 $S_x(\omega) = \frac{4}{4a^2+\omega^2}$.

7—23 $R_x(\tau) = a_0^2 + \frac{a_1^2}{2}\cos\omega_0\tau$,

$$S_x(\omega) = 2\pi a_0^2\,\delta(t) + \frac{\pi a_1^2}{2}[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)].$$

7—24 $S_x(\omega) = 2\pi a_0^2\,\delta(\omega) + \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\delta(\omega \pm n\omega_0)$.

7—25 $S_x(\omega) = \frac{\sqrt{\pi}\,\sigma_x^2}{2\omega_1}\left[e^{-\left(\frac{\omega-\omega_0}{2\omega_1}\right)^2} + e^{-\left(\frac{\omega+\omega_2}{2\omega_1}\right)^2}\right]$.

7—26 $S_x(\omega) = \frac{2a(a^2+\omega^2+\beta^2)}{(a^2+\omega^2+\beta^2)^2-4\omega^2\beta^2}$.

7—27 $S_x(\omega)=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\left(e^{-\frac{\omega-\beta}{2a}}+e^{-\frac{\beta+\omega}{2a}}\right)$.

7—28 $S_x(\omega)=2a\frac{a^2+\beta^2+\omega^2}{\omega^2+a^2-\beta^2-4\beta^2\omega^2}$

$$+2a\frac{a^2+\beta^2-\omega^2}{(a^2-\beta^2+\omega^2)^2+4a\beta^2}.$$

7—29 $\mu_x=16$, $\psi_x^2=41$, $\sigma_x^2=25$;

$$S_x(\omega)=100\left\{\frac{1}{16+(\omega_0-\omega)^2}+\frac{1}{16+(\omega_0+\omega)^2}\right\}+32\delta(t).$$

7—30 $S_x(\omega)=\frac{4a_0}{T\omega^2}\sin^2(\omega T/2)$.

7—31 $R_x(\tau)=\frac{cs_0}{\pi(c^2+\tau^2)}$.

7—32 $R_x(\tau)=8+\frac{1}{2\pi^2\tau^2}(1-\cos 20\pi\tau)$.

7—33 $R_x(\tau)=aB\left(\frac{\sin\pi B\tau}{B\pi\tau}\right)\cos 2\pi f_0\tau$.

7—34 $R_x(\tau)=\frac{a_1^2}{2}\cos\omega_1\tau+\frac{a_2^2}{2}\cos\omega_2\tau$.

7—35 $R_x(\tau)=2\left(\frac{\sin 400\pi\tau}{400\pi\tau}\right)cm^2$. $\psi_x^2=2cm^2$.

7—36 $R_{xy}(\tau)=\frac{b}{2a}(a-\tau)$.

7—37 $R_{xy}(\tau)=\frac{a_1b_1}{2}\cos\omega_1(\tau+t_0)$,

$R_{yx}(\tau)=\frac{a_1b_1}{2}\cos\omega_1(t_0-\tau)$.

7—38 $R_{xy}(\tau)=\frac{abc}{T}\sin\Omega(\tau-t_0)\sin\frac{2\pi}{T}(\tau-t_0)$.

$R_{yx}(\tau)=\frac{abc}{T}\sin\Omega(\tau+t_0)\sin\frac{2\pi}{T}(\tau+t_0)$.

7—39 $\psi_x^2=8.72cm$, $\sigma_x^2=2.17cm$.

7—40 $\mu=\left(\frac{y}{J_x}\mu_x+\frac{x}{J_y}\mu_y\right)\left(1-\frac{z}{L}\right)$;

$$\sigma^2=\left(1-\frac{z}{L}\right)^2\left(\frac{y^2}{J_x^2}\sigma_{x_0}^2+\frac{x^2}{J_y^2}\sigma_{y_0}^2\right.$$

$$\left.+2\frac{xy}{J_xJ_y}C_{x_0y_0}\right).$$

7—41 $\mu_A=\frac{1}{l}\int_0^l\mu_q(z)zdz$,

$$\sigma_A^2=\int_0^{l_1}\int_0^{l_1}R_q(zz_1)\left(\frac{z}{l}\right)\left(\frac{z_1}{l}\right)dzdz_1.$$

第八章

8—1 $\exp[j2\phi(f)]=\frac{s_{xy}(\omega)}{s_{yx}(\omega)}$;

$H(\omega)=\left|\frac{s_y(\omega)}{s_{xy}(\omega)}\right|e^{j\phi(f)}$, $S_x(\omega)=\frac{|s_{xy}(\omega)|^2}{s_y(\omega)}$.

8—2 $G_y(f)=\frac{1}{1+(2\pi Kf)^2}$.

$$R_y(\tau)=\frac{a}{4K}e^{-k|\tau|/K},\qquad \psi_y^2=\frac{a}{4K}$$

8—3 $S_x(\omega)=\frac{S_0}{k^2+c^2\omega^2}$, $R_f(\tau)=S_0\delta(\tau)$,

$$R_x(\tau)=\frac{S_0}{2kc}e^{-\frac{K}{c}|\tau|},\quad \psi=\frac{S_0}{2kc},\qquad \mu_x=0.$$

8—4 $\psi_x^2=\frac{aK}{4c}$.

$$S_x(\omega)=\frac{a_0K^2}{2(k^2+c^2\omega^2)},\quad R_x(\tau)=\frac{a}{4c}Ke^{-\frac{K}{c}|\tau|}.$$

8—5

$$\psi_x^2=\frac{S_0}{2}\cdot\frac{c^2+ck_2(k_1+k_2)/\omega_0k_1}{[c(k_1+k_2)+k_1k_2/\omega_0][c(k_1+k_2)/\omega_0]}.$$

8—6 $S_y(f)=S_x(f)\left(2\sin\frac{2\pi/T}{2}\right)^{2n}$.

8—7 $S_y(f)=S_x(f)\frac{\sin^2 2\pi fe}{(2\pi fe)^2}$.

8—8 $\psi_y^2=\frac{a^2}{4(k^2+\omega^2K^2)}$,

$$S_y(\omega)=\frac{\pi a^2}{2(K^2+\omega_0^2K^2)}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)],$$

$$R_y(\tau)=\frac{a}{2(K^2+\omega^2K^2)}\cos\omega_0\tau.$$

8—9 $S_x(\omega)=\frac{1568\pi}{64+\omega^2}\{\delta(\omega-7)+\delta(\omega+7)\}$,

$$\psi_x^2=13.8,\qquad R_x(\tau)=13.8\cos7\tau.$$

8—10 $s_x(\omega)=\dfrac{K^2 s_0}{(K-m\omega^2)^2+c^2\omega^2}$,

$$\psi_x^2=\frac{K^2 s_0}{4m^2\xi p'^3}.$$

$$R_x(\tau)=\frac{K^2 s_0}{4m^2\xi p'^3}$$

$$e^{-\xi p|\tau|}\left(\cos p'\tau+\frac{\xi p}{p'}\sin p'|\tau|\right),$$

$$p'=p\sqrt{1-\xi^2},\qquad p=\sqrt{\frac{K}{m}},$$

$$\xi=\frac{c}{2\sqrt{mK}}.$$

8—11 $S_x(\omega)=\dfrac{a^2b^2S_0}{(kb^2-ma^2\omega^2)^2+c^2\omega^2a^4}$,

$$\psi_x^2=\frac{S_0}{2kc}.$$

8—12 $\psi_x^2=\dfrac{81\omega_0 S_0}{2(K-9m\omega^2)(K-9m\omega^2+4c\omega_0)}$.

8—13

$$S_x(\omega)=\frac{(4K_1K_2+K_1)^2+K_1^2c^2\omega^2}{[4K_1K_2-m(K_1+4K_2)\omega]^2+[4K_1\omega+m\omega^2]^2c^2}\cdot S_0$$

$$\psi_x^2=\frac{S_0}{2}$$

$$\cdot\frac{K_1^3K_2c^2+(4K_1K_2+K_1)^2(K_1m+4K_2m)}{4K_1K_2[4K_1c(4m+4K_2m)-4K_1K_2cm]}.$$

8—14 $S_x(\omega)=\dfrac{R^4S_0}{[k-(m+J/R^2)\omega^2]^2+c^2R^4\omega^2}$,

$$T = \frac{S_0}{4c^2}.$$

8—15 $S_0(\omega) = \dfrac{s_0}{l^2[(k-3m\omega^2)^2 + c^2\omega^2]}$, $\quad T = \dfrac{cS_0}{4}$.

8—16 $S_y(\omega) = \dfrac{4k^2 s_0}{(2k-3m\omega^2)^2 + 64c^2\omega^2}$,

$$R_y(\tau) = \frac{k^2 s_0}{9m^2\xi p'^3} \times$$

$$e^{-\xi|\tau|}\left[\cos p'\tau + \frac{\xi p}{p'}\sin p'|\tau|\right],$$

$$\psi_x^2 = \frac{k^2 s_0}{9m^2\xi p'^3}.$$

8—17 $S_y(\omega) = \dfrac{16k^2 p'^3 S_0}{(22k-6m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}$, $\quad \psi_y^2 = \dfrac{4kS_0}{11c}$,

$$R_y(\tau) = \frac{k^2 s_0}{9m^2\xi p'^3}$$

$$\cdot\, e^{-\xi p\tau}\left\{\cos p'\tau + \frac{\xi p}{p'}\sin p'\tau\right\}.$$

8—18 $S_a(\omega) = \dfrac{4S_0}{(2k-9m\omega^2)^2 + 4c^2\omega^2}$,

$$\psi_a^2 = \frac{S_0}{2kc},$$

$$R_s(\tau) = \frac{S_0}{81\xi m^2 p'^3}$$

$$e^{-\xi p\tau}\left\{\cos p'\tau + \frac{\xi p}{p'}\sin p'\tau\right\}.$$

8—19 $S_y(\omega) = \dfrac{S_0\omega_0^2}{[(k-m\omega^2)^2 + c^2\omega^2][\omega^2 + \omega_0^2]}$,

$$\psi_y^2 = \frac{S_0\omega_0(c+m\omega_0)}{2k\omega_0[k\omega_0 m-(k+c\omega_0)(c+m\omega_0)]}$$

8—20 $\mu_x = 0$, $\psi_x^2 = \frac{S_0}{\pi kc}\mathrm{tg}^{-1}\frac{\Omega c}{k}$.

$$8—21\quad S_x(\omega) = \begin{cases} 0, & |\omega| > \Omega, \\ \dfrac{S_0}{\left[1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 0.01\,\omega^2/\omega_0^2}, & -\Omega \leqslant \omega \leqslant \Omega. \end{cases}$$

$$8—22\quad S_\theta(\omega) = \begin{cases} \dfrac{16S_0}{l^2[(k-4m\omega^2)^2+c^2\omega^2]}, & -\Omega < \omega < \Omega; \\ 0, & |\omega| > \Omega. \end{cases}$$

$$8—23\quad S_\theta(\omega) = \begin{cases} \dfrac{4S_0/l^2}{(8k-m\omega^2)^2+c^2\omega^2}, & \Omega \leqslant \omega \leqslant \Omega; \\ 0, & \text{其余}\ \omega. \end{cases}$$

8—24 $S_y(\omega) = \frac{1+4\xi^2\omega^2/p^2}{2[(1-\omega^2/p^2)^2+4\xi^2\omega^2/p^2]}\cdot a$.

$$\psi_y^2 = \frac{ap(1+4\xi^2)}{8\xi};$$

$$R_y(\tau) = \frac{ap(1+4\xi^2)}{8\xi}\times$$

$$e^{-\xi p\tau}\left[\cos p'\tau + \frac{\xi(1-4\xi^2)}{\sqrt{1-\xi^2}(1+4\xi^2)}\sin p'\tau\right].$$

8—25 δ_{min} 1.5cm.

8—26 $S_y(\omega)=\dfrac{(K^2+c^2\omega^2)S_0}{(K-M\omega^2)^2+c^2\omega^2}$，

$$\psi_y^2=\frac{MK+c^2}{2cM}S_0。$$

8—27 $S_{\ddot{y}}(\omega)=\dfrac{(K^2+c^2\omega^2)S_0}{(K-M\omega^2)^2+c^2\omega^2}$，

$$\psi_{\ddot{y}}^2=\frac{MK+c^2}{2cm}S_0。$$

8—28 $\psi_x=\sqrt{\psi_x^2}=m\left(\sqrt{\dfrac{KS_0}{2c}}+a^2\right)$。

8—29 $\omega_y^2=\dfrac{m^2S_0}{2kc}$。

8—30 $|H(\omega)|$

$$\begin{cases} cT/16ab, & \omega=\pm 2\pi(n-1)/T, \omega=\pm 2\pi(n+1)/T。\\ 0, & s_x(\omega),\ s_{xy}(\omega)\text{其他有定义的地方。}\end{cases}$$

提示：(1) 求输入的富氏级数展开式

$$x(t)=\frac{ab}{T}\left\{1+2\cos\frac{2\pi}{T}t+2\cos\frac{4\pi}{T}t+\cdots\right\}。$$

(2) 用公式(7.5)求输出的谱密度 $S(\Omega)$。它是大小为$4a^2b^2/T^2$等距离$(2\pi/T)$分布在频率轴上的$\delta(t)$函数组成的“梳”状函数。

8—31 $R_x(\tau)=\dfrac{S_0}{4\xi p'^3}$

e [illegible] $\left\{\cos p'\tau+\dfrac{\xi p}{p'}\sin p'\tau\right\}$；

$R_{x\dot{x}}(\tau)=\dfrac{d}{d\tau}R_x(\tau)$； $R_{\dot{x}}(\tau)=\dfrac{d^2}{d\tau^2}R_x(\tau)$；

$\rho_{x\dot{x}}(0)=0$。

8—32 $R_{\ddot{x}}(\tau)=\frac{S_0 p}{4\xi}e^{-\xi p\tau}\left\{(1+4\xi^2)\cos p'\tau\right.$

$$\left.+\frac{\xi p}{p'}(1-4\xi^2)\sin p'\tau\right\};$$

$$S_{\ddot{x}}(\omega)=\frac{1+4\xi^2(\omega/p)^2}{(1-\omega^2/p^2)^2+4\xi^2(\omega/p)^2},$$

$$\psi_{\ddot{x}}^2=\frac{S_0 p}{4\xi}(1+4\xi^2).$$

8—33 $S_\varphi(\omega)=\frac{S_0}{a^2((k-m\omega^2)^2+c^2\omega^2)};$

$$\psi_\varphi^2=\frac{S_0}{2a^2kc};$$

$$R_\varphi(\tau)=\frac{S_0}{4a^2m^2\xi p'^3}e^{-\xi p\tau}\left(\cos p'\tau\right.$$

$$\left.+\frac{\xi p}{p'}\sin p'\tau\right).$$

8—34

$$S_\varphi(\omega)=\frac{12.2V}{L^2}\left|\frac{4n\omega^4-b_1\omega^2+b_2}{\omega^4-ja_1\omega^3-a_2\omega^2+ja_3\omega+a_4}\right|;$$

$$b_1=-(p_0^4+4n^3\times4.3\times10^{-2}v^2),$$

$$b_2=4.3V^2p_0^4\times10^{-2},$$

$$a_1=0.125V+2n,$$

$$a_2=0.5nV+4.3V^2\times10^{-2}+p_0^2,$$

$$a_3=0.125Vp^2+8.6nV^2\times10^{-2},$$

$$a_4=-4.3V^2p^2\times10^{-2}.$$

8—35 32%. 61%. $1.25\sigma_x$. $3.03\sigma_x$.

8—36 (1) $\nu_a^+ = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m+c/\omega_0}}\, e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}$

(2) $p(a) = \frac{a}{\sigma^2} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}$,

其中$\sigma^2 = 1 + \frac{\pi S_0/kc}{\omega_0^2 + c\omega_0/m}$;

(3) $\mu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m} + \frac{c\omega_0}{m}}$.

8—37 $r_a^+ = \frac{1}{8}\frac{\sigma_{\dot y}}{\sigma_y}$.

8—38 $r_a^+ = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}\, e^{-a^2/(2\pi s_0/kc)}$,

$\mu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$.

8—39 $r_a^+ = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m+c/\omega_0}}\, e^{-a^2/2\sigma^2}$.

$\sigma^2 = 1 + \frac{\pi s_0/kc}{\omega_0^2 + c\omega_0/m}$.

$\mu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m} + \frac{c\omega_0}{m}}$.

8—40 12mm. 6.5mm.

8—41 3.57mm。 8—42 5.146g。5.01g。

每个频带宽Δf：

80，50，50，20，30，50，50，50，100，100，200，200，

例 8.7 应去掉 $\frac{1}{2\pi}$，$\sqrt{\psi_x^2}=1.6$弧度

第 九 章

9—1 $\gamma_{12}^2(f)=0.89$；$R_y(\tau)=11.4e^{-10\pi|\tau|}$；

$$S_y(f)=\frac{114}{25+f^2},\qquad S_{1y}(f)=\frac{18}{5+jf}.$$

$$R_{1y}(\tau)=\begin{cases}0 & \tau<0,\\ 36\pi e^{-10\pi\tau} & \tau\geqslant 0;\end{cases}$$

9—2 $S_y(f)=\dfrac{S_0}{8^2+f^2}(20+16\cos 2\pi fT)$；

$$R_y(\tau)=\frac{5\pi}{2}S_0e^{-16\pi|\tau|}+\pi S_0\left(e^{-16\pi|\tau+T|}+e^{-16\pi|\tau-T|}\right).$$

9—3

$$S_y(\omega)=\frac{8}{4+\omega^2}\begin{bmatrix}20+8(e^{j\omega}+e^{-j\omega}) & 14+2(e^{-j\omega}+10e^{j\omega})\\ 14+2(e^{j\omega}+10e^{-j\omega}) & 26+5(e^{j\omega}+e^{-j\omega})\end{bmatrix};$$

$$R_y(\tau)=2\left[e^{-2|\tau|}\begin{bmatrix}20 & 14\\ 14 & 26\end{bmatrix}+e^{-2|\tau-1|}\begin{bmatrix}8 & 2\\ 10 & 5\end{bmatrix}+e^{-2|\tau+1|}\begin{bmatrix}8 & 10\\ 2 & 5\end{bmatrix}\right].$$

9—4 $S_y(\omega)=\dfrac{4}{16+\omega^2}\begin{bmatrix}20 & 28\\ 28 & 41\end{bmatrix}$；

$$R_y(\tau)=\begin{bmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 20.5 \end{bmatrix} e^{-4|\tau|};$$

$$S_{xy}(\omega)=\frac{2}{4+j\omega}\begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}.$$

9—5 $$S_{xx}(\omega)=\frac{1}{(9k^2+4c^2\omega^2)}\begin{bmatrix} 26k^2+13c^2\omega^2 & 28k^2-j3kc\omega+13c^2\omega^2 \\ 28k^2+j3kc\omega+13c^2\omega^2 & 35k^2+13c^2\omega^2 \end{bmatrix}.$$

9—6 $$S_{x1}(\omega)=\frac{S_0}{9k^2+4c^2\omega^2}\Big[5k^2+2c^2\omega^2+2(2k^2$$

$$+c^2\omega^2)\cos\omega T$$

$$2kc\omega\sin\omega T\Big].$$

$$S_{x1x2}(\omega)=\frac{S_0}{9k^2+4c^2\omega^2}\Big[4k^2+2c^2\omega^2+e^{-j\omega T}(4k^2$$

$$+c^2\omega^2)+e^{j\omega T}(k^2+c^2\omega^2)\Big].$$

$$S_{x2}(\omega)=\frac{S_0}{9k^2+4c^2\omega^2}\Big[5k^2+2c^2\omega^2+2(2k^2$$

$$+c^2\omega^2)\cos\omega T+2kc\omega\sin\omega T\Big].$$

9—7 $$S(\omega)=\frac{1}{25k^2+9c^2\omega^2}$$

$$\begin{bmatrix} 75k^2+35c^2\omega^2, & 85k^2+35c^2\omega^2-j14kc\omega \\ 85k^2+35c^2\omega^2+j14kc\omega & 115k^2+35c^2\omega^2 \end{bmatrix}.$$

9—8 $S_x(\omega)=\dfrac{S_0}{(k-2km\omega^2)^2+c^2\omega^2(k-m\omega^2)^2}\begin{bmatrix}4k^2+c^2\omega^2 & k(2k-jc\omega)\\ k(2k+jc\omega) & k^2\end{bmatrix}$；

$T_{cp}=\dfrac{4mk+c^2}{4kcm}S_0$。

9—9 $S_y(f)=\dfrac{2}{(1+4f^2)(1+2f^2)}$；

$S_{uy}(f)=\dfrac{1}{(1-2f^2+j3f)(1+2f^2)}$。

9—10 $G_y(f)=\dfrac{6+20f^2}{1-10f^2+25f^4+324f^6}$；

$\gamma^2_{xy}(f)=\dfrac{1}{6+20f^2}$；

$S_{xy}(f)=\dfrac{1}{2(1+j2f-5f^2+j8f^3-36f^4)}$；

$r_{xy}(f)=1$。

9—11 $S_x(\omega)=\dfrac{S_0\begin{bmatrix}k_1^2 & k_1(k_1-m\omega^2)\\ k_1(k_1-m\omega^2) & (k_1-m\omega^2)^2\end{bmatrix}}{[2m^2\omega^4-(3k_1+k_2)m\omega^2+k_1k_2]^2+(ck_1\omega-cm\omega^3)^2}$。

9—12 $T_{cp}=\dfrac{S_0}{4c}$。

9—13 $\psi^2_{x_1}=\dfrac{30.9S_0}{K\sqrt{Km}}$， $\psi^2_{x_2}=\dfrac{102.9S_0}{K\sqrt{Km}}$.

9—14 $\psi^2_{\dot{x}_1}=\dfrac{5c^2-3km}{36mc(c^2-mk)}S_0$，

$$\psi^2_{\dot{x}_2}=\frac{c^2+km}{36mc(c^2-mk)}S_0.$$

9—15 $\gamma^2_{1y}=\dfrac{18}{19}$， $\gamma^2_{2y}=\dfrac{169}{171}$.

9—16 $\gamma^2=0.85$.

9—17 $S_{xx}(\omega)=\dfrac{S_0}{\triangle}$

$$\cdot\begin{bmatrix} k^2 & k(5k+jc\omega-3m\omega^2) \\ k(5k-jc\omega-3m\omega^2), & (5k-3m\omega^2)^2+c^2\omega^2 \end{bmatrix},$$

$$T=\frac{10km+c^2}{4kmc}S_0.$$

其中$\triangle=(4k^2-8km\omega^2+3m^2\omega^4)^2+c^2\omega^2(k-m\omega^2)^2$

9—18 $S(w)=\begin{bmatrix} S_x(w) & S_{x\varphi}(w) \\ S_{x\varphi}(w) & S_\varphi(w) \end{bmatrix}$

$$=\frac{S_0}{\Delta}\begin{bmatrix} k^2R^2 & kR(k+jc\omega-m_1\omega^2) \\ kR(k-jc\omega-m_1\omega^2) & (k-m_1\omega^2)^2+c^2\omega^2 \end{bmatrix}$$

其中 $\Delta=R^2[(m_1{}^2\omega^4-2km_1\omega^2)^2+(m_1c\omega^3-kc\omega)^2]$

9—19 $S_x(\omega)=\dfrac{S_0\begin{bmatrix} (5k-4m\omega^2)^2+c^2\omega^2 & 4k(5k-4m\omega^2+jc\omega) \\ 4k(5k-4m\omega^2-jc\omega) & 16k^2 \end{bmatrix}}{(k^2-9km\omega^2+4m^2\omega^4)^2+c^2\omega^2(k-m\omega^2)^2}$.

$$T_{sp} = \frac{33km + c^2}{16kmc} S_0.$$

$$(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2$$

9—20 $$S_x = \frac{k(k + jc\omega - m\omega^2)}{(1+9\omega^2)[(k^2-3km\omega^2+m^2\omega^4)^2}$$

$$k(k - jc\omega - m\omega^2)$$

$$\frac{k^2}{+(2kcm - cm\omega^3)^2]}.$$

9—21 $$T_{cp} = \frac{3km + 2c^2}{16kmc} S_0.$$

9—22 $$S_{x_1}(\omega) = \frac{1}{\Delta}\{4[(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2]$$

$$+10ck - 10cm\omega^2 + 8c^2\};$$

$$S_{x_2 x_1}(\omega) = \frac{1}{\Delta}[12ck - 12mc\omega^2 - j4c^2\omega + 5c^2$$

$$+ 5[(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2],$$

$$S_{x_1 x_2}(\omega) = \frac{1}{\Delta}\{12ck - 12cm\omega^2 + j4c^2\omega^2 + 5c^2$$

$$+ 5[(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2]\};$$

$$S_{x_2}(\omega) = \frac{1}{\Delta}\{4c^2 + 10ck - 10cm\omega^2$$

$$+ 8[(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2]\},$$

$$\Delta = (k^2c^2 + m^2\omega^4 - c^2\omega^2 - 2km\omega^2)^2$$

$$+ (2mc\omega^3 - 2ck\omega)^2.$$

9—23 参考例9.1